

Analisi Armonica su Gruppi e Simmetrie Percettive: Rappresentazioni Irriducibili nella Cognizione Visiva

Fondamenti Teorici e Neurofisiologici

Introduzione: La Geometria della Percezione

La percezione visiva rappresenta uno dei processi cognitivi più complessi e sofisticati che il sistema nervoso centrale abbia sviluppato nel corso dell'evoluzione. Lungi dall'essere una semplice registrazione passiva di stimoli luminosi, la visione costituisce un'attiva costruzione di rappresentazioni interne del mondo esterno, fondata su principi matematici profondi che solo recentemente abbiamo cominciato a comprendere nella loro interezza. Al cuore di questa comprensione si trova un'idea tanto elegante quanto potente: il cervello decompone gli stimoli visivi complessi utilizzando rappresentazioni che rispettano precise strutture algebriche, in particolare quelle dei gruppi di simmetria.

Questa prospettiva teorica non è semplicemente un'analogia suggestiva o un modello astratto. Essa trova fondamento in decenni di ricerche neurofisiologiche, a partire dai lavori pionieristici di David Hubel e Torsten Wiesel negli anni Sessanta del Novecento, che rivelarono l'esistenza di neuroni selettivi per l'orientamento nella corteccia visiva primaria dei mammiferi. Tali scoperte, che valsero agli autori il premio Nobel per la medicina nel 1981, aprirono la strada a una concezione radicalmente nuova del processamento visivo, in cui le cellule nervose non si limitano a registrare intensità luminose puntuali, ma rispondono invece a configurazioni geometriche specifiche degli stimoli, implementando così operazioni di riconoscimento di pattern fondate su invarianze e trasformazioni.

L'analisi armonica, quel ramo della matematica che studia come funzioni complesse possano essere decomposte in componenti più semplici attraverso trasformate integrali, fornisce il quadro teorico naturale per comprendere questi processi. Se la trasformata di Fourier classica decompone segnali temporali o spaziali in sinusoidi elementari, rappresentando implicitamente l'azione del gruppo abeliano delle traslazioni, la generalizzazione di questo approccio ai gruppi non commutativi permette di modellare sistemi percettivi che devono contemporaneamente gestire traslazioni, rotazioni, cambiamenti di scala e altre trasformazioni geometriche.

Il gruppo euclideo del piano $SE(2)$, che combina traslazioni e rotazioni, emerge così come struttura matematica fondamentale per descrivere l'organizzazione funzionale della corteccia visiva primaria. Ogni neurone orientato può essere concepito come un elemento di base di una rappresentazione di questo gruppo, rispondendo in modo ottimale a stimoli presentati in una particolare posizione del campo visivo e con una particolare orientazione. La totalità di

questi neuroni costituisce un sistema di coordinate naturali nello spazio delle possibili immagini, coordinate che rispettano le simmetrie geometriche intrinseche dello spazio visivo.

L'Architettura Funzionale della Corteccia Visiva Primaria

La corteccia visiva primaria, designata come area V1 nella nomenclatura neuroanatomica, rappresenta il primo stadio di elaborazione corticale dell'informazione visiva nei mammiferi. Situata nel lobo occipitale, questa regione cerebrale riceve le proiezioni dal nucleo genicolato laterale del talamo, che a sua volta raccoglie i segnali provenienti dalle cellule gangliari della retina. Ciò che rende V1 particolarmente interessante dal punto di vista computazionale non è semplicemente la sua posizione strategica nella gerarchia del processamento visivo, ma piuttosto la sua organizzazione funzionale estremamente regolare e altamente strutturata.

Le registrazioni elettrofisiologiche condotte da Hubel e Wiesel rivelarono che i neuroni di V1 possono essere classificati in diverse categorie funzionali. Le cellule semplici rispondono in modo ottimale a barre o margini luminosi presentati in una specifica posizione del campo visivo, con una particolare orientazione e, in molti casi, con una precisa polarità di contrasto. Queste cellule possiedono campi recettivi che possono essere modellati matematicamente come funzioni di Gabor bidimensionali, il prodotto di una funzione gaussiana per una senoide orientata. Le cellule complesse, invece, mantengono la selettività per l'orientamento ma mostrano maggiore invarianza rispetto alla posizione precisa dello stimolo all'interno del loro campo recettivo, implementando così una forma di invarianza locale rispetto alle traslazioni.

L'organizzazione anatomica di V1 riflette questa struttura funzionale attraverso il concetto di colonna di dominanza oculare e colonna di orientamento. I neuroni con preferenze orientazionali simili tendono a essere raggruppati in colonne perpendicolari alla superficie corticale, e l'orientamento preferito varia in modo continuo e sistematico muovendosi tangenzialmente lungo la corteccia. Questa architettura crea una mappa bidimensionale in cui una dimensione rappresenta la posizione retinotopica dello stimolo e l'altra dimensione rappresenta l'orientamento, realizzando così una rappresentazione esplicita dello spazio del gruppo $SE(2)$.

Dal punto di vista matematico, possiamo formalizzare questa organizzazione nel modo seguente. Sia $G = SE(2)$ il gruppo euclideo del piano, i cui elementi $g = (x, y, \theta)$ rappresentano traslazioni di coordinate (x, y) seguite da rotazioni di angolo θ attorno all'origine. Questo gruppo agisce naturalmente sullo spazio delle immagini $I(x, y)$ attraverso l'operazione:

$$(g \cdot I)(x', y') = I(R_{-\theta} \cdot (x' - x, y' - y))$$

dove R_{θ} denota la matrice di rotazione di angolo θ . Un neurone semplice in V1, con campo recettivo centrato in posizione (x_0, y_0) e orientamento preferito θ_0 , può essere modellato come un operatore lineare che calcola il prodotto scalare tra l'immagine trasformata e una funzione prototipo ψ :

$$r(g) = \langle g \cdot I, \psi \rangle = \iint (g \cdot I)(x, y) \psi(x, y) dx dy$$

Questa espressione ha la forma di una trasformata integrale sul gruppo SE(2), e rappresenta una generalizzazione diretta della trasformata di Fourier classica al caso di un gruppo non abeliano. La funzione prototipo ψ , che corrisponde al profilo del campo recettivo del neurone, gioca il ruolo di un elemento di base in una rappresentazione del gruppo.

Teoria delle Rappresentazioni e Decomposizione Irriducibile

Per comprendere pienamente le implicazioni di questa struttura matematica, è necessario introdurre alcuni concetti fondamentali della teoria delle rappresentazioni dei gruppi. Una rappresentazione di un gruppo G su uno spazio vettoriale V è un omomorfismo $\rho: G \rightarrow GL(V)$, che associa a ogni elemento del gruppo un operatore lineare invertibile sullo spazio vettoriale, preservando la struttura di gruppo. Nel contesto della percezione visiva, lo spazio V può essere concepito come lo spazio funzionale delle possibili immagini, e la rappresentazione descrive come il gruppo di simmetrie geometriche agisce su questo spazio.

Una rappresentazione si dice riducibile se lo spazio V può essere decomposto in sottospazi invarianti non banali rispetto all'azione del gruppo, ovvero se esistono sottospazi $V_1, V_2, \dots, V_n$ tali che $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ e ciascun V_i è invariante sotto l'azione di $\rho(g)$ per ogni $g \in G$. Una rappresentazione irriducibile, al contrario, non ammette tale decomposizione: l'unico sottospazio invariante è lo spazio totale stesso o lo spazio nullo.

Il teorema fondamentale della teoria delle rappresentazioni per gruppi compatti afferma che ogni rappresentazione può essere decomposta in modo unico come somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Questo risultato, dovuto a Frobenius e Schur per gruppi finiti e generalizzato da Peter e Weyl per gruppi di Lie compatti, ha implicazioni profonde per la comprensione del processamento visivo. Esso suggerisce che esiste un insieme privilegiato di componenti elementari, le rappresentazioni irriducibili, in termini delle quali qualsiasi stimolo visivo complesso può essere analizzato.

Nel caso del gruppo SE(2), che non è compatto a causa delle traslazioni illimitate, la situazione è leggermente più sottile. Tuttavia, se ci restringiamo a considerare immagini definite su un dominio spaziale limitato, o se introduciamo condizioni di periodicità, possiamo recuperare molte delle proprietà desiderabili della teoria classica. Le rappresentazioni irriducibili di SE(2) sono ben note dalla teoria matematica: esse sono parametrizzate da frequenze spaziali e hanno dimensione infinita, corrispondendo a funzioni armoniche che oscillano con una particolare frequenza e che possono avere orientamenti arbitrari.

Le funzioni di Gabor emergono naturalmente in questo contesto come base privilegiata per le rappresentazioni. Una funzione di Gabor bidimensionale può essere scritta nella forma:

$$\psi(x, y; x_0, y_0, \theta, \lambda, \sigma) = \exp(-(x'^2 + y'^2)/(2\sigma^2)) \cdot \cos(2\pi x'/\lambda + \varphi)$$

dove (x', y') sono le coordinate ruotate:

$$x' = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta \quad y' = -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta$$

I parametri di questa funzione hanno significati geometrici precisi: (x_0, y_0) determina la posizione del campo recettivo, θ l'orientamento preferito, λ la lunghezza d'onda della

sinusoide (inversamente proporzionale alla frequenza spaziale), σ la deviazione standard dell'involuppo gaussiano, γ il rapporto d'aspetto ellittico e ϕ la fase. L'involuppo gaussiano localizza la funzione nello spazio, mentre la componente sinusoidale la localizza nel dominio delle frequenze, realizzando un compromesso ottimale tra localizzazione spaziale e frequenziale secondo il principio di indeterminazione di Heisenberg generalizzato.

Questo compromesso non è arbitrario ma riflette una proprietà fondamentale delle rappresentazioni tempo-frequenza. Se definiamo le incertezze spaziale e frequenziale come:

$$\Delta x = \sqrt{\iint x^2 |\psi(x,y)|^2 dx dy} \quad \Delta k = \sqrt{\iint k^2 |\hat{\psi}(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y}$$

dove $\hat{\psi}$ denota la trasformata di Fourier di ψ , allora vale la disuguaglianza:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 1/2$$

Le funzioni di Gabor saturano questa disuguaglianza, raggiungendo il limite inferiore e costituendo così rappresentazioni ottimali nel senso dell'informazione congiunta posizione-frequenza.

Evidenze Neurofisiologiche e Validazione Sperimentale

La corrispondenza tra le predizioni teoriche basate sulla teoria delle rappresentazioni e la realtà neurofisiologica è sorprendentemente accurata. Numerosi studi sperimentali hanno confermato che i campi recettivi dei neuroni semplici in V1 possono essere modellati con notevole precisione mediante funzioni di Gabor. Daugman (1985) condusse un'analisi quantitativa sistematica dei campi recettivi di cellule semplici nel gatto, dimostrando che il novantacinque per cento della varianza poteva essere catturato da un modello di Gabor bidimensionale con parametri appropriati.

Jones e Palmer (1987) estesero questi risultati ai primati, confermando che anche nella corteccia visiva della scimmia macaco i campi recettivi delle cellule semplici erano ottimamente descritti da funzioni di Gabor. Più recentemente, tecniche di imaging ottico e registrazioni multi-elettrodo hanno permesso di mappare l'organizzazione funzionale di V1 con risoluzioni spaziali senza precedenti, rivelando la presenza di mappe di orientamento continue che coprono l'intera gamma di orientazioni da zero a centottanta gradi in modo sistematico.

Un aspetto particolarmente interessante emerso da queste ricerche è l'esistenza di singolarità topologiche nelle mappe di orientamento, punti in cui tutte le orientazioni convergono. Questi punti, chiamati "pinwheel centers" per la loro somiglianza con girandole, rappresentano configurazioni in cui neuroni con orientazioni preferite molto diverse si trovano in stretta vicinanza spaziale. Dal punto di vista della teoria dei gruppi, questi centri possono essere interpretati come punti di degenerazione dove la struttura fibrosa dello spazio $SE(2)$ diventa singolare, analogamente ai poli di una sfera nella proiezione stereografica.

L'evidenza sperimentale supporta anche l'idea che la popolazione di neuroni in V1 implementi effettivamente una decomposizione dell'immagine in componenti irriducibili. Ringach (2002) dimostrò che l'insieme dei campi recettivi forma una base sovracompleta

per lo spazio delle immagini naturali, con ridondanza controllata che permette robustezza al rumore e tolleranza a danni locali. La sovracompletezza, lungi dall'essere uno spreco di risorse neurali, fornisce gradi di libertà aggiuntivi che possono essere sfruttati per implementare forme di invarianza e per ottimizzare la codifica in presenza di vincoli metabolici.

Gruppi di Simmetria Visiva e Loro Classificazione

Mentre il gruppo $SE(2)$ fornisce una descrizione appropriata delle simmetrie elementari che caratterizzano la visione spaziale, stimoli visivi più complessi possono possedere simmetrie aggiuntive che corrispondono a sottogruppi o estensioni di $SE(2)$. La classificazione sistematica di queste simmetrie richiede l'introduzione di concetti dalla teoria dei gruppi cristallografici e dalla geometria differenziale.

Un gruppo di simmetria di un pattern visivo P è l'insieme di tutte le trasformazioni geometriche che lasciano il pattern invariato. Formalmente, se P è una funzione che assegna un valore di luminanza a ogni punto del piano, il gruppo di simmetria $Sym(P)$ è definito come:

$$Sym(P) = \{g \in Isom(R^2) : g \cdot P = P\}$$

dove $Isom(R^2)$ denota il gruppo delle isometrie del piano euclideo. Le isometrie del piano si dividono in due categorie: trasformazioni dirette (traslazioni e rotazioni) che preservano l'orientamento, e trasformazioni inverse (riflessioni e glissosimmetrie) che lo invertono.

Per pattern periodici che si ripetono indefinitamente nel piano, la classificazione cristallografica fornisce un risultato notevole: esistono esattamente diciassette gruppi di simmetria planare distinti, detti gruppi dei mosaici o gruppi wallpaper nella letteratura anglosassone. Questi gruppi, la cui classificazione completa fu ottenuta dal matematico russo Evgraf Fedorov nel 1891 e indipendentemente dal cristallografo tedesco Arthur Schoenflies nel 1891, rappresentano tutte le possibili combinazioni di simmetrie traslazionali, rotazionali e riflessive compatibili con la periodicità bidimensionale.

I diciassette gruppi cristallografici planari possono essere classificati secondo vari criteri. Un primo criterio riguarda il sistema reticolare sottostante: obliquo, rettangolare, romboedrico (quadrato) o esagonale. Un secondo criterio riguarda la presenza o assenza di assi di riflessione e il loro orientamento rispetto al reticolo. Un terzo criterio considera l'ordine massimo di simmetria rotazionale presente nel gruppo: due, tre, quattro o sei (il teorema della restrizione cristallografica impedisce l'esistenza di simmetrie rotazionali di ordine cinque o superiore a sei in pattern periodici).

La notazione standard per questi gruppi utilizza il sistema Hermann-Mauguin della cristallografia, che codifica le proprietà simmetriche attraverso simboli compatti. Per esempio, il gruppo $p4m$ possiede simmetria rotazionale di ordine quattro e riflessioni sia lungo le direzioni parallele agli assi del reticolo quadrato sia lungo le diagonali. Il gruppo $p6m$, che appare frequentemente nell'arte islamica e nell'architettura decorativa, combina simmetria rotazionale di ordine sei con riflessioni, producendo la simmetria esagonale caratteristica degli alveari delle api e di molte strutture naturali.

La rilevanza percettiva di queste classificazioni matematiche è stata investigata attraverso esperimenti psicofisici che hanno esaminato come osservatori umani riconoscano, discriminino e valutino esteticamente pattern con differenti simmetrie. Palmer e Hemenway (1978) dimostrarono che la simmetria bilaterale, corrispondente al gruppo $p1m$ nella classificazione cristallografica, è la forma di simmetria più facilmente rilevabile e quella che produce i tempi di risposta più rapidi in compiti di riconoscimento. Questo privilegio della simmetria bilaterale può essere spiegato sia da fattori ecologici (la prevalenza di simmetria bilaterale negli organismi viventi) sia da fattori computazionali (la relativa semplicità delle trasformazioni richieste per verificare l'invarianza rispetto a riflessione).

Rappresentazioni Irriducibili di Gruppi Finiti: Teoria dei Caratteri

Per gruppi di simmetria finiti, come i gruppi diedrali D_n che descrivono pattern con simmetria rotazionale di ordine n e riflessioni, la teoria delle rappresentazioni assume una forma particolarmente elegante attraverso l'uso dei caratteri. Il carattere di una rappresentazione $\rho: G \rightarrow GL(V)$ è la funzione $\chi_\rho: G \rightarrow \mathbb{C}$ definita come:

$$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$$

dove tr denota la traccia della matrice. I caratteri godono di proprietà notevoli che li rendono strumenti potentissimi per l'analisi armonica su gruppi finiti.

In primo luogo, i caratteri sono funzioni di classe: assumono lo stesso valore su tutti gli elementi appartenenti alla stessa classe di coniugio. Questo riflette il fatto che elementi coniugati rappresentano essenzialmente la stessa trasformazione geometrica descritta in sistemi di coordinate diversi. In secondo luogo, i caratteri delle rappresentazioni irriducibili formano un sistema ortogonale rispetto al prodotto scalare:

$$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle = (1/|G|) \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\sigma(g)}$$

dove la barra denota la coniugazione complessa. Questa ortogonalità implica che i caratteri irriducibili formano una base per lo spazio delle funzioni di classe su G , permettendo così di decomporre qualsiasi funzione invariante per coniugio in componenti irriducibili.

Consideriamo come esempio concreto il gruppo diedrale D_4 , che descrive la simmetria di un quadrato. Questo gruppo ha otto elementi: l'identità e , quattro rotazioni r, r^2, r^3 di multipli di novanta gradi, e tre riflessioni s_1, s_2, s_3 (rispettivamente attorno all'asse verticale, orizzontale e diagonale). Le classi di coniugio sono: $\{e\}, \{r, r^3\}, \{r^2\}, \{s_1, s_2\}, \{s_3\}$. Il gruppo D_4 possiede cinque rappresentazioni irriducibili: quattro unidimensionali e una bidimensionale.

La rappresentazione bidimensionale irriducibile può essere realizzata concretamente attraverso l'azione di D_4 sul piano:

$$\rho(r) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (rotazione di } 90^\circ) \quad \rho(s_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (riflessione verticale)}$$

Questa rappresentazione è irriducibile perché non esiste nessun sottospazio unidimensionale del piano che sia invariante sotto tutte queste trasformazioni simultaneamente. I caratteri di questa rappresentazione sono: $\chi(e) = 2, \chi(r) = 0, \chi(r^2) = -2, \chi(s) = 0$ per qualsiasi riflessione.

Nel contesto della percezione visiva, la decomposizione di un pattern con simmetria D_4 in componenti irriducibili corrisponde all'identificazione di caratteristiche del pattern che si trasformano in modo semplice sotto le operazioni del gruppo. Per esempio, la componente corrispondente alla rappresentazione banale (quella che associa l'identità a ogni elemento del gruppo) estrae la media spaziale del pattern, completamente invariante sotto tutte le simmetrie. Le componenti corrispondenti a rappresentazioni unidimensionali non banali estraggono caratteristiche che cambiano segno sotto certe operazioni di simmetria ma rimangono invarianti sotto altre, come la differenza tra le metà superiore e inferiore del pattern.

Funzioni Sferiche e Gruppi Cristallografici nella Percezione

Armoniche Sferiche e Simmetrie Rotazionali

L'estensione dell'analisi armonica ai gruppi di Lie compatti, in particolare al gruppo delle rotazioni $SO(3)$, introduce concetti matematici di straordinaria eleganza che trovano applicazioni dirette nella modellazione della percezione visiva tridimensionale e nell'analisi di oggetti con simmetrie rotazionali. Le armoniche sferiche, che costituiscono la generalizzazione naturale delle serie di Fourier alla superficie della sfera, giocano un ruolo centrale in questo contesto.

Una funzione definita sulla sfera unitaria S^2 può essere espansa in serie di armoniche sferiche nella forma:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

dove θ e φ sono le coordinate sferiche standard (colatitudine e azimuth), e le funzioni Y_{lm} sono le armoniche sferiche di grado l e ordine m . Queste funzioni costituiscono un sistema ortonormale completo rispetto al prodotto scalare:

$$\langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta, \varphi) \bar{Y}_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Le armoniche sferiche possono essere espresse esplicitamente in termini di polinomi di Legendre associati P_{lm} :

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(4\pi)}{(l-m)!(l+m)!}} \cdot P_{lm}(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}$$

Il parametro l , chiamato numero quantico del momento angolare nella meccanica quantistica, determina il grado del polinomio e corrisponde al numero di nodali (curve su cui la funzione si annulla) sulla sfera. Il parametro m , chiamato numero quantico magnetico, determina la dipendenza azimutale e può assumere valori da $-l$ a $+l$, per un totale di $2l+1$ funzioni indipendenti per ogni valore di l .

Dal punto di vista della teoria delle rappresentazioni, le armoniche sferiche di grado l fissato costituiscono una base per la rappresentazione irriducibile di dimensione $2l+1$ del gruppo $SO(3)$. Questa rappresentazione descrive come funzioni sferiche si trasformano sotto rotazioni. Quando ruotiamo il sistema di coordinate, i coefficienti a_{lm} dell'espansione si

mescolano tra loro secondo matrici di rotazione $D^l_{\{m'm\}}(R)$ che dipendono solo dal grado l :

$$Y_{-l}^m(R^{-1} \cdot (\theta, \varphi)) = \sum_{m'=-l}^l D^l_{\{m'm\}}(R) Y_{-l}^{m'}(\theta, \varphi)$$

Le matrici D^l formano una rappresentazione irriducibile, nel senso che non esiste nessuna combinazione lineare non banale di armoniche sferiche dello stesso grado che rimanga invariata sotto rotazioni arbitrarie. Ogni rappresentazione irriducibile di $SO(3)$ è di questo tipo, e il teorema di Peter-Weyl garantisce che qualsiasi funzione sulla sfera può essere decomposta in modo unico come somma diretta di queste componenti irriducibili.

Nel contesto della percezione visiva, le armoniche sferiche trovano applicazione nell'analisi di texture con simmetrie rotazionali e nella rappresentazione di forme tridimensionali. Kazhdan, Funkhouser e Rusinkiewicz (2003) svilupparono un metodo per il riconoscimento di forme 3D basato su descrittori armonici sferici, sfruttando il fatto che gli oggetti con la stessa forma ma orientamenti diversi differiscono solo per rotazioni dei coefficienti $a_{\{lm\}}$. Questa invarianza rotazionale può essere ottenuta considerando gli spettri di potenza:

$$P_l = \sum_{m=-l}^l |a_{\{lm\}}|^2$$

che sono completamente invarianti sotto rotazioni, fornendo così una firma geometrica intrinseca dell'oggetto.

I Diciassette Gruppi Cristallografici Planari: Struttura Matematica

Ritorniamo ora a un'analisi più dettagliata dei diciassette gruppi cristallografici planari, la cui comprensione è essenziale per l'interpretazione di pattern decorativi, ornamenti architettonici e composizioni artistiche basate su simmetrie. La classificazione completa di questi gruppi rappresenta un risultato fondamentale della matematica del diciannovesimo secolo, con implicazioni che si estendono ben oltre la cristallografia alla teoria dei gruppi astratti, alla geometria differenziale e, come vedremo, alla psicologia della percezione.

Ogni gruppo cristallografico planare è caratterizzato da un reticolo di traslazioni bidimensionale, che può essere pensato come un parallelogramma elementare che tassella il piano attraverso ripetizioni. A questo si aggiungono possibili simmetrie puntuali: rotazioni attorno a centri fissi e riflessioni rispetto ad assi. La compatibilità tra periodicità e simmetrie rotazionali è governata dal teorema della restrizione cristallografica, che afferma che solo rotazioni di ordine due, tre, quattro e sei sono compatibili con reticoli periodici bidimensionali.

Il gruppo più semplice è $p1$, che contiene solo traslazioni senza alcuna simmetria puntuale. Il reticolo è obliquo generale, senza vincoli sugli angoli o le lunghezze dei vettori di base. Questo gruppo corrisponde a pattern completamente asimmetrici che si ripetono periodicamente, come alcuni tessuti o carte da parati moderne minimaliste.

Il gruppo $p2$ introduce la simmetria rotazionale di ordine due attorno a punti del reticolo, creando pattern che appaiono identici quando ruotati di centottanta gradi attorno a questi centri. Molti motivi tessili tradizionali, particolarmente quelli dell'Asia centrale, esibiscono questa simmetria, creando composizioni dinamiche basate su elementi che si alternano tra orientamento normale e invertito.

I gruppi pm e pg introducono riflessioni. Il gruppo pm possiede assi di riflessione paralleli che attraversano il pattern in una direzione, creando strisce simmetriche. Il gruppo pg è più sottile: combina traslazioni con glissosimmetrie (combinazioni di riflessione e traslazione parallela all'asse di riflessione), producendo pattern che mostrano una sorta di "simmetria scivolata". Questi due gruppi appaiono frequentemente in fregi architettonici e bordi decorativi.

Il gruppo cm combina riflessioni con un reticolo romboedrico, producendo una struttura a diamante con simmetria speculare. Questo pattern è comune in tessuti scozzesi e in alcuni pavimenti a mosaico medievali.

I gruppi pmm, pmg, pgg e cmm aggiungono riflessioni in direzioni multiple. Il gruppo pmm è il più simmetrico tra i gruppi con reticolo rettangolare: possiede riflessioni sia orizzontali che verticali, creando una struttura completamente speculare in entrambe le direzioni. Appare in molti tessuti tradizionali e in griglie architettoniche regolari. Il gruppo pmg combina riflessioni verticali con glissosimmetrie orizzontali, mentre pgg contiene solo glissosimmetrie incrociate senza riflessioni pure. Il gruppo cmm ha un reticolo romboedrico con riflessioni lungo entrambe le diagonali.

I gruppi con simmetria rotazionale di ordine tre sono p3, p31m e p3m1. Il gruppo p3 contiene solo rotazioni di centoventi gradi attorno a punti del reticolo esagonale, creando pattern con un carattere fortemente direzionale tripartito. I gruppi p31m e p3m1 aggiungono riflessioni, ma con orientamenti diversi rispetto al reticolo esagonale, producendo strutture caleidoscopiche complesse.

I gruppi con simmetria rotazionale di ordine quattro sono p4, p4m e p4g. Il gruppo p4 ha un reticolo quadrato con centri di rotazione di novanta gradi, creando pattern con forte simmetria quadripartita. Il gruppo p4m aggiunge riflessioni lungo le diagonali e gli assi del quadrato, producendo la simmetria completa del quadrato. Il gruppo p4g è più sottile, combinando rotazioni di novanta gradi con glissosimmetrie, creando pattern in cui le riflessioni sono "sfalsate" rispetto ai centri di rotazione.

Infine, i gruppi con simmetria rotazionale di ordine sei sono p6 e p6m. Il gruppo p6 ha un reticolo esagonale con centri di rotazione di sessanta gradi, mentre p6m aggiunge riflessioni, producendo la simmetria completa dell'esagono regolare. Quest'ultimo gruppo, il più simmetrico di tutti i diciassette, appare in molte decorazioni islamiche, in alveari e in strutture cristalline naturali.

Analisi Armonica sui Gruppi Cristallografici

L'analisi armonica su gruppi cristallografici generalizza la trasformata di Fourier discreta al caso di funzioni definite su domini con simmetrie periodiche. Per un gruppo cristallografico G con reticolo di traslazioni Λ , possiamo decomporre una funzione periodica $f(x, y)$ in componenti che si trasformano secondo rappresentazioni irriducibili di G.

La trasformata di Fourier discreta bidimensionale fornisce il punto di partenza. Se il dominio fondamentale ha dimensioni $L_x \times L_y$, possiamo scrivere:

$$f(x, y) = \sum_{\{k_x, k_y\}} F(k_x, k_y) e^{2\pi i(k_x x/L_x + k_y y/L_y)}$$

dove i vettori d'onda (k_x , k_y) appartengono al reticolo reciproco. Tuttavia, questa decomposizione non tiene conto delle simmetrie puntuali del gruppo cristallografico. Per incorporare queste simmetrie, dobbiamo organizzare i coefficienti di Fourier in multipletti che si trasformano secondo rappresentazioni irriducibili.

Consideriamo il gruppo $p4m$ come esempio. Questo gruppo contiene rotazioni di novanta gradi e riflessioni, formando il gruppo puntuale di simmetria del quadrato D_4 . I coefficienti di Fourier $F(k_x, k_y)$ sotto l'azione di questo gruppo si trasformano tra loro: una rotazione di novanta gradi scambia k_x con $-k_y$ e k_y con k_x , mentre una riflessione rispetto all'asse x scambia k_y con $-k_y$.

Possiamo costruire combinazioni lineari dei coefficienti di Fourier che si trasformano secondo rappresentazioni irriducibili specifiche. Per esempio, la combinazione:

$$F_A(k_x, k_y) = F(k_x, k_y) + F(-k_x, k_y) + F(k_x, -k_y) + F(-k_x, -k_y) + F(k_y, k_x) + F(-k_y, k_x) + F(k_y, -k_x) + F(-k_y, -k_x)$$

è completamente invariante sotto tutte le operazioni di $p4m$, corrispondendo alla rappresentazione banale. Altre combinazioni corrispondono a rappresentazioni che cambiano segno sotto certe operazioni, estraendo aspetti del pattern che violano selettivamente certe simmetrie.

Percezione delle Simmetrie: Evidenze Psicofisiche

La rilevanza percettiva della classificazione cristallografica è stata oggetto di numerose ricerche sperimentali. Van der Helm e Leeuwenberg (1996) proposero la teoria del codice strutturale (Structural Information Theory), secondo cui il sistema visivo rappresenta pattern simmetrici attraverso codifiche compatte che sfruttano le ridondanze introdotte dalle simmetrie. Secondo questa teoria, la salienza percettiva di un pattern è inversamente proporzionale alla quantità di informazione necessaria per codificarlo, con pattern altamente simmetrici che risultano più salienti perché richiedono descrizioni più brevi.

Tyler (1996) condusse esperimenti sistematici sulla discriminazione dei diciassette gruppi cristallografici, chiedendo a osservatori di classificare pattern appartenenti a gruppi diversi. I risultati rivelarono una gerarchia di salienza: i gruppi con maggiore simmetria (come $p6m$) erano più facilmente riconosciuti e categorizzati rispetto a gruppi con simmetrie più deboli (come $p1$ o $p2$). Interessantemente, questa gerarchia non corrispondeva semplicemente al numero di elementi di simmetria, ma piuttosto alla "qualità" delle simmetrie: le riflessioni erano più salienti delle rotazioni di ordine alto, e le rotazioni erano più salienti delle glissosimmetrie.

Liu, Chernov, Essock, Glazier e Serre (2009) utilizzarono tecniche di neuroimaging funzionale per investigare le basi neurali della percezione di simmetrie. I loro risultati indicarono che pattern con diverse simmetrie attivavano regioni corticali distinte: le simmetrie riflessive attivavano preferenzialmente regioni parietali laterali, mentre le simmetrie rotazionali attivavano regioni occipito-temporali ventrali. Questo suggerisce che il cervello implementa analizzatori di simmetria specializzati, potenzialmente corrispondenti a circuiti neurali che calcolano rappresentazioni irriducibili rispetto a diversi sottogruppi di simmetria.

Mosaici Islamici: Un Caso di Studio

L'arte islamica, con il suo ricco repertorio di decorazioni geometriche, fornisce un laboratorio ideale per studiare l'interazione tra struttura matematica e percezione estetica. Le restrizioni iconoclastiche nell'Islam tradizionale, che scoraggiavano la rappresentazione figurativa, portarono allo sviluppo di una tradizione decorativa basata su pattern geometrici astratti di straordinaria complessità e sofisticazione matematica.

I mosaici dell'Alhambra di Granada, in Spagna, rappresentano l'apice di questa tradizione artistica. Analisi matematiche condotte da Branko Grünbaum e Geoffrey Shephard rivelarono che le decorazioni dell'Alhambra esibiscono tutti e diciassette i gruppi cristallografici planari, anticipando di secoli la loro classificazione matematica formale. Questa notevole completezza suggerisce che gli artigiani islamici, pur non disponendo di un linguaggio matematico formale, possedevano una comprensione intuitiva profonda delle possibili simmetrie planari.

Particolarmente interessante è il gruppo $p6m$, che appare frequentemente in rosette stellate e pattern a esagoni intrecciati. Questo gruppo, con la sua massima simmetria, crea un senso di equilibrio e armonia che molti osservatori descrivono come esteticamente piacevole. La struttura esagonale richiama forme naturali come celle di alveari e cristalli di neve, suggerendo una possibile base ecologica per la preferenza estetica.

Un altro motivo ricorrente è basato sul gruppo $p4m$, realizzato attraverso griglie di quadrati con decorazioni interne simmetriche. Questi pattern creano un effetto di tessellazione continua che guida l'occhio attraverso la superficie in modo ritmico. La ripetizione regolare genera aspettative percettive che vengono continuamente soddisfatte, creando un senso di prevedibilità piacevole temperato da sufficiente varietà nei dettagli per mantenere l'interesse visivo.

Le tassellazioni quasi-periodiche di Penrose, scoperte negli anni Settanta, forniscono un interessante controesempio. Questi pattern, che possono riempire il piano senza mai ripetersi esattamente pur mantenendo simmetrie locali, violano i presupposti della cristallografia classica. Sorprendentemente, motivi quasi-periodici simili furono scoperti in alcuni mosaici medievali islamici, particolarmente nella Darb-i Imam shrine a Isfahan, Iran, suggerendo ancora una volta una comprensione intuitiva avanzata dei principi geometrici.

Gruppi Diedrali e Rosette Simmetriche

I gruppi diedrali D_n , che descrivono le simmetrie di poligoni regolari con n lati, giocano un ruolo importante nell'analisi di elementi decorativi isolati come rosette, mandala e motivi centralizzati. Il gruppo D_n ha ordine $2n$ e contiene n rotazioni (multipli di $360^\circ/n$) e n riflessioni.

La teoria delle rappresentazioni per D_n è particolarmente elegante. Per n dispari, il gruppo ha $(n+3)/2$ rappresentazioni irriducibili: due unidimensionali (la banale e quella che cambia segno sotto riflessioni) e $(n-1)/2$ bidimensionali. Per n pari, ci sono $n/2+3$ rappresentazioni: quattro unidimensionali e $(n-4)/2$ bidimensionali.

Nel contesto della percezione visiva, queste rappresentazioni corrispondono a diversi aspetti della struttura della rosetta. La rappresentazione banale estrae la media radiale, completamente invariante sotto rotazioni e riflessioni. Le rappresentazioni bidimensionali estraggono componenti che oscillano con frequenze angolari multiple di $360^\circ/n$, corrispondendo a petali, lobi o altre caratteristiche che si ripetono attorno al centro.

Wilkinson (1998) studiò la percezione di rosette con diversi ordini di simmetria, trovando che rosette con $n = 4, 6$ e 8 erano preferite esteticamente rispetto a quelle con $n = 3, 5$ o 7 . Questo risultato suggerisce una preferenza per simmetrie di ordine pari, possibilmente legata alla prevalenza di queste simmetrie in strutture biologiche (come fiori a quattro o sei petali) e alla loro compatibilità con la simmetria bilaterale del sistema visivo stesso.

Ornamenti Architettonici e Fregi

Gli ornamenti architettonici, particolarmente i fregi che decorano cornici, architravi e bordi, forniscono esempi di gruppi di simmetria unidimensionali. Esistono esattamente sette gruppi di fregi, classificati secondo la presenza o assenza di traslazioni, riflessioni verticali, riflessioni orizzontali, rotazioni di centottanta gradi e glissosimmetrie.

Il fregio più semplice, denotato $p111$, contiene solo traslazioni ripetute. Un esempio potrebbe essere una sequenza di lettere "F" ripetute: F F F F F. Il fregio $p1m1$ aggiunge riflessioni verticali, come in: A A A A A, dove ogni lettera è simmetrica verticalmente. Il fregio $p11m$ ha riflessioni orizzontali, creando pattern come $\infty \infty \infty \infty$ dove il simbolo di infinito ha simmetria speculare orizzontale.

I fregi $p1a1$ e $pm11$ sono più sottili. Il primo combina traslazioni con glissosimmetrie verticali, mentre il secondo ha riflessioni verticali alternate da inversioni. Il fregio $p2mg$ combina rotazioni di centottanta gradi con riflessioni verticali e glissosimmetrie orizzontali, creando pattern complessi come quelli trovati in molte greche architettoniche classiche. Infine, il fregio $pmm2$ combina riflessioni sia verticali che orizzontali con rotazioni di centottanta gradi, producendo la massima simmetria possibile in un pattern unidimensionale periodico.

Washburn e Crowe (1988) condussero un'analisi antropologica sistematica di fregi in diverse culture, trovando che tutti i sette gruppi appaiono in arte decorativa tradizionale in ogni parte del mondo, anche in società senza contatto storico. Questa universalità suggerisce che i gruppi di simmetria dei fregi rappresentano archetipi percettivi fondamentali, probabilmente radicati in vincoli cognitivi universali piuttosto che in trasmissione culturale.

Wavelets di Gabor e Invarianze Spazio-Frequenziali

La Teoria di Gabor e le Sue Basi Neurofisiologiche

La teoria proposta da Dennis Gabor nel 1946 rappresenta uno dei contributi più influenti alla comprensione matematica della percezione sensoriale. Gabor, fisico ungherese che successivamente ricevette il premio Nobel per l'invenzione dell'olografia, affrontò il problema fondamentale della rappresentazione simultanea di informazione nel dominio del tempo e della frequenza. La sua intuizione centrale fu che esistono funzioni matematiche ottimali che

minimizzano l'incertezza congiunta in questi due domini, e che tali funzioni hanno la forma di oscillazioni sinusoidali modulate da un inviluppo gaussiano.

Nel contesto della percezione visiva, la teoria di Gabor può essere trasposta sostituendo il tempo con le coordinate spaziali. Una funzione di Gabor bidimensionale assume la forma generale:

$$g(x, y; x_0, y_0, \theta, \lambda, \sigma_x, \sigma_y, \phi) = \exp(-((x' - x_0)^2/(2\sigma_x^2) + (y' - y_0)^2/(2\sigma_y^2))) \cdot \cos(2\pi x'/\lambda + \phi)$$

dove le coordinate ruotate (x', y') sono definite dalla trasformazione:

$$x' = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta \quad y' = -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta$$

I parametri della funzione hanno interpretazioni geometriche e fisiologiche precise. Il punto (x_0, y_0) specifica la posizione del centro del campo recettivo nel piano visivo. L'angolo θ determina l'orientamento preferito, corrispondente alla direzione lungo la quale la modulazione sinusoidale varia più rapidamente. Il parametro λ , la lunghezza d'onda della portante sinusoidale, è inversamente proporzionale alla frequenza spaziale preferita del filtro: $\lambda = 1/f_0$. Le deviazioni standard σ_x e σ_y dell'inviluppo gaussiano determinano l'estensione spaziale del campo recettivo e possono essere diverse nelle due direzioni, creando campi recettivi ellittici. Infine, la fase ϕ determina la posizione dei picchi di risposta rispetto al centro dell'inviluppo gaussiano: $\phi = 0$ corrisponde a una funzione di Gabor simmetrica (pari), mentre $\phi = \pi/2$ corrisponde a una funzione antisimmetrica (dispari).

La trasformata di Fourier di una funzione di Gabor rivela la sua localizzazione nel dominio delle frequenze. Sfruttando il teorema della convoluzione e la proprietà delle trasformate di gaussiane, si può dimostrare che:

$$G(k_x, k_y) = \sigma_x \sigma_y \exp(-2\pi^2((k_x - k_0 \cos \theta)^2 \sigma_x^2 + (k_y - k_0 \sin \theta)^2 \sigma_y^2))$$

dove $k_0 = 1/\lambda$ è la frequenza centrale. La trasformata è quindi anch'essa una gaussiana, centrata nel punto $(k_0 \cos \theta, k_0 \sin \theta)$ nel piano delle frequenze spaziali, con larghezze inversamente proporzionali a σ_x e σ_y . Questa dualità tra localizzazione spaziale e frequenziale è governata dal principio di indeterminazione di Heisenberg generalizzato.

Definendo le incertezze come deviazioni standard, possiamo scrivere:

$$\Delta x = \sigma_x, \Delta k_x = 1/(2\pi\sigma_x)$$

e similmente per la direzione y . Il prodotto delle incertezze è:

$$\Delta x \cdot \Delta k_x = 1/(2\pi)$$

che rappresenta il limite minimo imposto dalla meccanica quantistica (in unità dove $\hbar = 1$). Le funzioni di Gabor sono uniche nel saturare simultaneamente questo limite in entrambe le direzioni, rendendole ottimali nel senso della teoria dell'informazione.

Nel 1985, John Daugman pubblicò uno studio fondamentale che dimostrò quantitativamente che i campi recettivi dei neuroni semplici nella corteccia visiva primaria dei mammiferi potevano essere modellati con notevole precisione mediante funzioni di Gabor

bidimensionali. Utilizzando tecniche di regressione non lineare per adattare modelli di Gabor a campi recettivi misurati elettrofisiologicamente, Daugman trovò che tipicamente più del novantacinque per cento della varianza poteva essere catturata dal modello di Gabor con cinque parametri liberi (posizione, orientamento, frequenza spaziale, estensione spaziale e fase).

Questa corrispondenza tra teoria matematica e realtà biologica non è coincidentale. Argomenti basati su principi di efficienza computazionale suggeriscono che filtri di Gabor rappresentano una soluzione ottimale per sistemi che devono estrarre simultaneamente informazione su dove si trova un pattern visivo (localizzazione spaziale) e che cosa contiene (contenuto frequenziale). Vincoli metabolici impongono che il cervello debba operare con un numero limitato di neuroni, ciascuno con un campo recettivo di estensione finita. I filtri di Gabor massimizzano l'informazione estraibile soggetta a questi vincoli.

Banche di Filtri di Gabor e Rappresentazioni Sovracomplete

Un singolo neurone con un campo recettivo di Gabor fornisce informazione locale su un aspetto specifico dell'immagine: la presenza di contrasto a una particolare posizione, orientamento e frequenza spaziale. Per ricostruire completamente un'immagine, o per estrarne caratteristiche significative per compiti di riconoscimento, è necessaria una collezione di filtri che copra sistematicamente l'intero spazio dei parametri rilevanti.

Una banca di filtri di Gabor può essere costruita campionando lo spazio dei parametri (x_0 , y_0 , θ , λ) secondo una griglia regolare. Se consideriamo $N_x \times N_y$ posizioni spaziali, N_θ orientamenti uniformemente distribuiti tra 0 e π , e N_λ scale frequenziali tipicamente organizzate in ottave ($\lambda_k = \lambda_0 \cdot 2^k$), il numero totale di filtri nella banca è:

$$N_{\text{totale}} = N_x \cdot N_y \cdot N_\theta \cdot N_\lambda$$

Per un'immagine di dimensioni moderate, diciamo 256×256 pixel, con otto orientamenti e quattro scale, questo può facilmente superare un milione di filtri individuali. Questa rappresentazione è fortemente sovracompleta: il numero di filtri eccede largamente il numero di pixel nell'immagine originale.

La sovracompletezza, pur sembrando ridondante, offre vantaggi computazionali significativi. In primo luogo, fornisce robustezza al rumore: se l'informazione è distribuita su molti canali, la corruzione di alcuni canali non compromette gravemente la rappresentazione complessiva. In secondo luogo, permette invarianza parziale: traslazioni, rotazioni o cambiamenti di scala piccoli modificano principalmente quali filtri rispondono fortemente, ma non eliminano completamente la risposta, facilitando così il riconoscimento di oggetti in condizioni variabili. In terzo luogo, consente rappresentazioni sparse: per immagini naturali tipiche, solo una piccola frazione dei filtri risponde significativamente, concentrando l'informazione e riducendo il costo metabolico della trasmissione neurale.

La sparsità delle rappresentazioni di Gabor per immagini naturali è stata quantificata da Field (1987, 1994), che dimostrò che le statistiche delle immagini naturali sono ottimizzate per la decomposizione in filtri localizzati in posizione e frequenza. Le immagini naturali esibiscono correlazioni a lungo raggio che decadono approssimativamente come una legge di potenza $1/f$ nel dominio delle frequenze. Questa struttura statistica implica che

componenti a frequenze diverse contribuiscono in modo comparabile all'energia totale dell'immagine, giustificando una rappresentazione multicanale che copre uniformemente un ampio intervallo di scale.

Wavelets e Analisi Multiscala

La teoria delle wavelets, sviluppata indipendentemente in matematica applicata e fisica durante gli anni Ottanta, fornisce un quadro generale per l'analisi tempo-frequenza o spazio-frequenza che include le funzioni di Gabor come caso speciale. Una wavelet è una funzione $\psi(t)$ (o $\psi(x, y)$ nel caso bidimensionale) che è ben localizzata sia nel dominio spaziale che in quello frequenziale, e che ha media nulla:

$$\int \psi(t) dt = 0$$

La trasformata wavelet continua di un segnale $f(t)$ è definita come:

$$W_f(a, b) = (1/\sqrt{a}) \int f(t) \psi((t-b)/a) dt$$

dove il parametro b controlla la traslazione (posizione) e il parametro a controlla la dilatazione (scala). La normalizzazione $1/\sqrt{a}$ assicura che l'energia sia preservata attraverso diverse scale.

Nel caso bidimensionale, rilevante per la visione, possiamo generalizzare introducendo anche rotazioni. Una famiglia di wavelets orientate può essere generata da una wavelet madre $\psi(x, y)$ attraverso:

$$\psi_{\{a,b,\theta\}}(x, y) = (1/a) \psi(R_{-\theta} \cdot ((x-b_x)/a, (y-b_y)/a))$$

dove R_θ denota la matrice di rotazione. Questa famiglia forma una rappresentazione del gruppo delle similitudini del piano (traslazioni, rotazioni e dilatazioni), generalizzando il gruppo euclideo $SE(2)$ discusso precedentemente.

Le wavelets di Gabor, definite da:

$$\psi(x, y) = \exp(-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)) \cdot \exp(2\pi i k_0 x)$$

costituiscono un esempio particolarmente importante, combinando localizzazione ottimale con struttura oscillatoria. Altre famiglie di wavelets comunemente utilizzate includono le wavelets di Morlet (simili a Gabor ma con diversa normalizzazione), le wavelets del cappello messicano (la derivata seconda di una gaussiana), e le wavelets di Haar (funzioni a gradini).

Un risultato fondamentale della teoria delle wavelets è l'esistenza di basi ortonormali di wavelets che permettono decomposizioni non ridondanti. Mentre le rappresentazioni sovracomplete di Gabor discusse precedentemente utilizzano più funzioni del necessario per una rappresentazione completa, le basi wavelet ortonormali forniscono rappresentazioni minimali in cui ogni coefficiente wavelet cattura informazione indipendente.

La decomposizione wavelet può essere implementata efficientemente attraverso algoritmi di analisi multiscala (multiresolution analysis). L'algoritmo di Mallat, introdotto nel 1989, decompone ricorsivamente un segnale in componenti di approssimazione (contenenti basse

frequenze) e dettaglio (contenenti alte frequenze) attraverso operazioni di convoluzione e sottocampionamento. Questo schema può essere visualizzato come una struttura ad albero binario, dove ogni livello della decomposizione corrisponde a una scala diversa.

Invarianze Spazio-Frequenziali e il Gruppo Affine

Le trasformazioni che preservano certe proprietà delle rappresentazioni di Gabor o wavelet sono descritte dal gruppo affine del piano, che generalizza ulteriormente il gruppo euclideo includendo anche dilatazioni (cambiamenti di scala). Un elemento del gruppo affine può essere scritto come:

$$g = (b, A)$$

dove $b \in \mathbb{R}^2$ rappresenta una traslazione e $A \in GL(2, \mathbb{R})$ è una matrice invertibile 2×2 che rappresenta una trasformazione lineare (rotazione, dilatazione, shear). L'azione di questo gruppo su un punto (x, y) è:

$$g \cdot (x, y) = A \cdot (x, y) + b$$

Per wavelets che trasformano covariantemente sotto il gruppo affine, cioè wavelets per cui:

$$\psi_g(x, y) = |\det(A)|^{-1/2} \psi(A^{-1} \cdot ((x, y) - b))$$

possiamo definire una trasformata wavelet affine:

$$W_f(g) = \langle f, \psi_g \rangle$$

Questa trasformata ha la proprietà di covarianza: se trasformiamo l'immagine secondo g_0 , i coefficienti wavelet si trasformano secondo:

$$W_{\{g_0 \cdot f\}}(g) = W_f(g_0^{-1} \cdot g)$$

Questa proprietà è fondamentale per il riconoscimento di oggetti invariante rispetto a trasformazioni geometriche. Se due immagini differiscono solo per una trasformazione affine, i loro coefficienti wavelet sono semplicemente traslazioni l'uno dell'altro nello spazio dei parametri del gruppo.

Dal punto di vista della teoria delle rappresentazioni, la trasformata wavelet affine implementa una rappresentazione unitaria del gruppo affine sullo spazio $L^2(\mathbb{R}^2)$ delle immagini a quadrato integrabile. Le proprietà di questa rappresentazione, in particolare la sua irriducibilità e la formula di inversione, sono governate dalla teoria generale delle rappresentazioni di gruppi localmente compatti.

Applicazioni Computazionali: Filtri di Gabor nel Riconoscimento di Pattern

Le banche di filtri di Gabor hanno trovato ampie applicazioni in visione artificiale e riconoscimento di pattern. Un'applicazione particolarmente riuscita è il riconoscimento di

volti, dove filtri di Gabor a multiple scale e orientamenti catturano caratteristiche discriminative robuste a variazioni di illuminazione, espressione ed età.

Il metodo dei Gabor jets, introdotto da Lades et al. (1993), rappresenta un volto attraverso un grafo i cui nodi sono posizionati su punti caratteristici (angoli degli occhi, punta del naso, angoli della bocca) e dove ogni nodo è etichettato con un vettore di coefficienti di Gabor calcolati in quella posizione per diverse orientazioni e scale. La similarità tra due volti può essere quantificata confrontando i loro grafi di Gabor, con misure di distanza che tengono conto sia della geometria del grafo che dei valori dei coefficienti.

Un'altra applicazione significativa è la segmentazione di texture. Texture diverse producono pattern distintivi di risposte in banche di filtri di Gabor: texture orientate attivano principalmente filtri allineati con la direzione dominante, texture grossolane attivano filtri a bassa frequenza spaziale, texture fini attivano filtri ad alta frequenza. Cluster analysis nello spazio multidimensionale delle risposte di Gabor può identificare regioni tessiturali omogenee, permettendo la segmentazione automatica di immagini complesse.

Nella teoria delle reti neurali convoluzionali profonde (deep convolutional neural networks), che hanno rivoluzionato il campo della visione artificiale nell'ultimo decennio, è interessante notare che i filtri appresi nel primo strato spesso assomigliano sorprendentemente a funzioni di Gabor. Questo fenomeno, osservato ripetutamente in diverse architetture e dataset, suggerisce che filtri di Gabor rappresentano una soluzione naturale, quasi inevitabile, per l'estrazione di caratteristiche primitive da immagini, emergendo sia dall'evoluzione biologica che dall'ottimizzazione computazionale.

Modelli Neurofisiologici Avanzati: Energie e Cellule Complesse

La teoria originale di Gabor, pur catturando accuratamente le proprietà delle cellule semplici in V1, richiede estensioni per modellare cellule complesse e altri tipi neuronali con proprietà di invarianza più elaborate. Il modello energetico, proposto da Adelson e Bergen (1985) e sviluppato da Heeger (1992), fornisce un quadro teorico per comprendere queste cellule.

Una cellula complessa può essere modellata come un rilevatore di energia locale che combina le risposte di cellule semplici con la stessa preferenza orientazionale e frequenziale ma diverse fasi. Matematicamente, se denotiamo con r_{even} e r_{odd} le risposte di due cellule semplici in quadratura di fase ($\phi = 0$ e $\phi = \pi/2$), la risposta della cellula complessa è:

$$r_{\text{complex}} = \sqrt{r_{\text{even}}^2 + r_{\text{odd}}^2}$$

Questa operazione ha diverse conseguenze importanti. In primo luogo, rende la risposta invariante rispetto alla fase della portante sinusoidale, eliminando così la sensibilità alla polarità del contrasto che caratterizza le cellule semplici. In secondo luogo, implementa una forma di rettificazione non lineare che enfatizza stimoli forti e sopprime rumore debole. In terzo luogo, la combinazione in quadratura fornisce informazione sulla componente locale di Fourier indipendentemente dalla fase.

Geometricamente, l'operazione può essere interpretata come il calcolo della norma di un vettore complesso:

$$z = r_{\text{even}} + i \cdot r_{\text{odd}} \quad |z| = r_{\text{complex}}$$

Questo collega il modello energetico alla teoria della rappresentazione analitica dei segnali, dove segnali reali vengono estesi al piano complesso per facilitare l'analisi di ampiezza e fase.

Estensioni successive del modello energetico hanno introdotto meccanismi di normalizzazione divisiva per modellare effetti di saturazione e inibizione laterale. Il modello di normalizzazione, proposto da Heeger (1992) e Carandini e Heeger (2012), assume che la risposta di un neurone sia divisa per una stima dell'attività totale di una popolazione di neuroni vicini:

$$r_{\text{normalized}} = r / (\sigma + \sum_j w_j r_j)$$

dove σ è una costante di saturazione e w_j sono pesi che determinano quanto ciascun neurone j contribuisce al segnale di normalizzazione. Questo meccanismo implementa una forma di controllo automatico del guadagno che adatta la sensibilità del sistema al livello locale di contrasto, migliorando la discriminabilità in condizioni di basso contrasto ed evitando saturazione in condizioni di alto contrasto.

Rappresentazioni Invarianti alla Trasformazione

Una questione centrale nella neurobiologia computazionale della visione è come il sistema nervoso costruisce rappresentazioni che mantengono informazione sul contenuto di un'immagine pur diventando progressivamente invarianti rispetto a trasformazioni irrilevanti come traslazioni, rotazioni, cambiamenti di scala ed illuminazione. Questo problema dell'invarianza è fondamentale per il riconoscimento di oggetti: dobbiamo riconoscere una sedia come sedia indipendentemente dalla sua posizione nel campo visivo, dal suo orientamento o dalle dimensioni della sua proiezione retinica.

La teoria delle rappresentazioni di gruppi fornisce un quadro elegante per affrontare questo problema. Se un gruppo G agisce su uno spazio di stimoli S , una rappresentazione invariante è una mappa $\varphi: S \rightarrow V$ (dove V è uno spazio vettoriale) tale che:

$$\varphi(g \cdot s) = \varphi(s) \text{ per ogni } g \in G, s \in S$$

Cioè, stimoli che differiscono solo per una trasformazione nel gruppo producono la stessa rappresentazione. Un tale invariante completo elimina completamente l'informazione sulla trasformazione, il che può essere troppo drastico per molte applicazioni pratiche.

Una nozione più flessibile è quella di covarianza o equivarianza. Una rappresentazione φ è covariante se:

$$\varphi(g \cdot s) = \rho(g) \cdot \varphi(s)$$

dove ρ è una rappresentazione del gruppo G su V . In questo caso, trasformare l'input produce una trasformazione predicibile dell'output, ma l'informazione non è completamente persa.

Le rappresentazioni di Gabor discusse precedentemente sono covarianti rispetto al gruppo $SE(2)$. Se trasliamo o ruotiamo un'immagine, i coefficienti di Gabor si traslano o ruotano di conseguenza nello spazio dei parametri (x, y, θ) . Questa covarianza può essere sfruttata per costruire rappresentazioni invarianti attraverso operazioni di pooling.

Il pooling consiste nell'aggregare risposte su un certo insieme di filtri, tipicamente quelli che coprono una regione spaziale o un intervallo di parametri. Per esempio, il max-pooling sceglie la risposta massima in un gruppo:

$$r_{\text{pool}} = \max\{r_i : i \in \text{gruppo}\}$$

Questa operazione introduce invarianza locale: piccole traslazioni che spostano il pattern da un filtro a un altro all'interno del gruppo non cambiano l'output del pooling, finché almeno uno dei filtri nel gruppo risponde fortemente.

Complessità, Estetica e Manipolazione Artistica delle Simmetrie

Complessità dei Gruppi e Preferenze Estetiche

La relazione tra simmetria e bellezza è stata oggetto di riflessione filosofica sin dall'antichità classica. Platone considerava la simmetria una delle forme fondamentali del bello, mentre Aristotele la includeva tra i principi essenziali dell'armonia e della proporzione. Tuttavia, solo con lo sviluppo della psicologia sperimentale nel ventesimo secolo è diventato possibile investigare quantitativamente come le simmetrie influenzino i giudizi estetici.

Birkhoff (1933) propose uno dei primi modelli matematici della misura estetica, definendo il valore estetico M come il rapporto tra ordine O e complessità C :

$$M = O / C$$

dove l'ordine era quantificato attraverso elementi di simmetria, regolarità e ripetizione, mentre la complessità era misurata dal numero di elementi distinti nel pattern. Secondo questo modello, pattern con alta simmetria ma complessità moderata avrebbero massimo valore estetico. Pattern troppo semplici mancherebbero di interesse, mentre pattern troppo complessi risulterebbero caotici.

La teoria dell'informazione di Shannon (1948) fornì strumenti più rigorosi per quantificare la complessità. Un pattern completamente regolare e predicibile ha entropia informativa minima, mentre un pattern completamente casuale ha entropia massima. Arnheim (1974) suggerì che l'estetica ottimale si trova in una zona intermedia: sufficiente ordine per essere comprensibile, sufficiente complessità per essere interessante.

Dal punto di vista della teoria dei gruppi, la complessità di un pattern può essere correlata all'ordine del suo gruppo di simmetria. L'ordine di un gruppo finito $|G|$ è il numero dei suoi elementi. Per i gruppi cristallografici planari, che sono infiniti a causa delle traslazioni, possiamo invece considerare l'ordine del gruppo puntuale di simmetria, cioè il sottogruppo finito che descrive rotazioni e riflessioni ma non traslazioni.

Una misura alternativa di complessità è fornita dalla dimensione del dominio fondamentale: la regione minimale che genera l'intero pattern attraverso applicazione delle operazioni di simmetria. Pattern con gruppi di simmetria più grandi hanno domini fondamentali più piccoli, poiché maggiore simmetria implica maggiore ridondanza. Se A_{totale} è l'area totale coperta dal pattern e A_{fund} è l'area del dominio fondamentale, la ridondanza R può essere definita come:

$$R = A_{\text{totale}} / A_{\text{fund}}$$

Per gruppi finiti, questa ridondanza è esattamente uguale all'ordine del gruppo.

Studi sperimentali hanno investigato come la complessità del gruppo di simmetria influenzi le preferenze estetiche. Eisenman (1967) presentò a osservatori pattern con diversi gradi di simmetria, trovando una relazione a U invertita: simmetrie intermedie erano preferite rispetto a simmetrie molto basse o molto alte. Questo risultato supporta l'ipotesi di una zona ottimale di complessità.

Tuttavia, risultati successivi hanno rivelato un quadro più sfumato. Locher e Smets (1992) dimostrarono che la preferenza per simmetrie diverse dipende dal contesto e dal compito. In compiti di riconoscimento rapido, simmetrie semplici come la riflessione bilaterale erano favorite. In giudizi estetici deliberati, simmetrie più complesse come quelle dei gruppi $p4m$ o $p6m$ ricevevano valutazioni più alte, particolarmente da osservatori con formazione artistica.

Palmer e Griscom (2013) condussero esperimenti sistematici con pattern appartenenti ai diciassette gruppi cristallografici, raccogliendo valutazioni estetiche da centinaia di partecipanti. I risultati rivelarono una gerarchia robusta di preferenze. I gruppi più apprezzati erano $p4m$ (simmetria del quadrato con riflessioni) e $p6m$ (simmetria esagonale con riflessioni), entrambi caratterizzati da alta simmetria puntuale. I gruppi meno apprezzati erano quelli con solo glissosimmetrie (pg , pgg) o con bassa simmetria puntuale ($p1$, $p2$).

Interessantemente, questa gerarchia non correlava semplicemente con l'ordine del gruppo puntuale, ma piuttosto con una misura composita che pesava diversamente diversi tipi di simmetria. Le riflessioni contribuivano più positivamente alla valutazione estetica rispetto alle rotazioni, e le rotazioni più delle glissosimmetrie. Questo suggerisce che il sistema visivo umano ha sensibilità e preferenze differenziali per diverse trasformazioni geometriche, possibilmente riflettendo la loro prevalenza nell'ambiente visivo naturale.

Fondamenti Neurali delle Preferenze di Simmetria

Le basi neurali delle preferenze estetiche per la simmetria sono state investigate attraverso tecniche di neuroimaging funzionale. Jacobsen et al. (2006) utilizzarono la risonanza magnetica funzionale (fMRI) per confrontare l'attivazione cerebrale evocata da pattern simmetrici versus asimmetrici durante giudizi estetici espliciti. Pattern giudicati come belli, molti dei quali erano altamente simmetrici, attivavano preferenzialmente la corteccia prefrontale mediale e il nucleo caudato, regioni associate con la valutazione di ricompensa e la presa di decisioni affettive.

Sasaki et al. (2005) trovarono che l'esposizione ripetuta a pattern con una particolare simmetria produceva adattamento neurale selettivo in aree visive extrastratiali,

particolarmente nel complesso occipitale laterale (LOC). Questo adattamento era specifico per il tipo di simmetria: pattern con simmetria bilaterale producevano adattamento per simmetria bilaterale ma non per simmetria rotazionale, e viceversa. Questo suggerisce l'esistenza di popolazioni neuronali distinte, ciascuna specializzata nel rilevamento di un particolare tipo di simmetria.

Dal punto di vista computazionale, Wagemans (1995) propose che la rilevazione di simmetrie sia computazionalmente economica: invece di rappresentare indipendentemente ogni elemento di un pattern simmetrico, il sistema visivo può rappresentare il dominio fondamentale più il gruppo di simmetria, ottenendo così compressione dell'informazione. Questa compressione riduce il carico cognitivo, liberando risorse per altri processi. La preferenza estetica per la simmetria potrebbe riflettere questa facilitazione del processamento.

Tuttavia, modelli basati puramente sulla facilità di processamento non possono spiegare completamente i pattern di preferenze osservati. Reber, Schwarz e Winkielman (2004) proposero la teoria della fluenza percettiva (perceptual fluency), secondo cui stimoli processati fluentemente evocano risposte affettive positive. La simmetria facilita la fluenza attraverso ridondanza strutturale. Ma questa teoria predice che maggiore simmetria dovrebbe sempre produrre maggiore piacevolezza, contraddicendo l'evidenza di preferenze per simmetrie intermedie.

Una teoria alternativa, proposta da Ramachandran e Hirstein (1999) nel loro framework delle "leggi artistiche", suggerisce che il sistema visivo si è evoluto per rilevare e valorizzare certi pattern statisticamente significativi nell'ambiente naturale. La simmetria bilaterale caratterizza organismi viventi, e la sua rilevazione rapida potrebbe aver conferito vantaggi selettivi (riconoscimento di conspecifici, predatori, prede). La preferenza estetica per la simmetria sarebbe un sottoprodotto di questi meccanismi adattativi.

Ornamenti Architettonici: Analisi di Casi Specifici

L'architettura fornisce un laboratorio ricco per studiare come principi di simmetria siano stati applicati artisticamente attraverso culture e periodi storici. Consideriamo alcuni esempi paradigmatici.

L'architettura greca classica, esemplificata dal Partenone di Atene, si basa fondamentalmente sulla simmetria bilaterale. La facciata del tempio è rigorosamente simmetrica rispetto a un asse verticale centrale, con colonne, metope e frontone disposti in modo speculare. Questa simmetria trasmette un senso di equilibrio, stabilità e perfezione idealizzata. Tuttavia, sottili asimmetrie intenzionali, come la lieve curvatura delle linee orizzontali e l'inclinazione delle colonne verso l'interno, introducono dinamismo visivo che previene monotonia.

L'architettura gotica medievale, come nella cattedrale di Notre-Dame di Parigi, mantiene la simmetria bilaterale della facciata ma introduce complessità attraverso elaborazione verticale. I rosoni circolari nelle facciate gotiche spesso esibiscono simmetrie rotazionali di ordine alto (tipicamente 8, 12 o 16), corrispondenti ai gruppi diedrali D_8 , D_{12} , D_{16} . Queste simmetrie multiple creano un senso di elevazione spirituale attraverso la moltiplicazione geometrica di motivi.

L'architettura islamica, particolarmente nelle moschee e nei palazzi dell'età d'oro islamica (ottavo-tredicesimo secolo), esplorò sistematicamente possibilità simmetriche più complesse. Gli zellij (mosaici di ceramica smaltata) marocchini utilizzano estensivamente i gruppi cristallografici $p6m$ e $p4m$, creando pattern che sembrano estendersi all'infinito. La geometria esagonale del gruppo $p6m$ richiama l'infinità divina attraverso la continuità matematica.

Un esempio particolarmente sofisticato è il Patio de los Leones nell'Alhambra. Le decorazioni murali circostanti esibiscono molteplici gruppi di simmetria sovrapposti: fregi lungo i bordi superiori implementano i sette gruppi di fregi, pannelli murali quadrati utilizzano $p4m$, e motivi esagonali stellati implementano $p6m$. Questa stratificazione di simmetrie crea ricchezza visiva mantenendo coerenza strutturale.

L'architettura rinascimentale italiana, come nelle opere di Brunelleschi e Alberti, reintrodusse enfasi su proporzioni matematiche derivate dalla geometria euclidea. La facciata di Santa Maria Novella a Firenze, progettata da Alberti, incorpora il rapporto aureo $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ in molteplici scale. Questo rapporto, intimamente connesso alla simmetria pentagonale (che paradossalmente non può apparire in gruppi cristallografici periodici a causa del teorema della restrizione), crea armonia percepibile subconsciousamente.

Mosaici Islamici: Matematica e Spiritualità

La tradizione dei mosaici geometrici nell'arte islamica rappresenta uno dei dialoghi più profondi tra matematica, arte e spiritualità nella storia culturale umana. Le proibizioni contro la rappresentazione figurativa in contesti religiosi islamici, derivanti da interpretazioni di hadith profetici, orientarono l'espressione artistica verso l'astrazione geometrica. Lungi dall'essere una limitazione, questa costrizione stimolò un'esplorazione sistematica delle possibilità simmetriche che anticipa di secoli risultati matematici formali.

Il principio sottostante era esprimere l'infinità e la perfezione divine attraverso pattern che potrebbero estendersi indefinitamente in tutte le direzioni. I gruppi cristallografici, con le loro simmetrie traslazionali, forniscono esattamente questa proprietà: un dominio fondamentale finito genera, attraverso ripetizione, una decorazione infinita del piano.

Le tecniche costruttive utilizzate dagli artigiani islamici, documentate in trattati come il "Trattato sulle Costruzioni Geometriche Necessarie agli Artigiani" di al-Buzjani (decimo secolo), erano basate su costruzioni con riga e compasso. Partendo da reticoli di base (quadrato, esagonale, triangolare), gli artigiani sovrapponevano stelle poligonali e intrecci, creando pattern di straordinaria complessità.

Un motivo ricorrente è la stella a otto punte, che può essere inscritta in un ottagono regolare. Questo motivo si presta a tassellazioni secondo il gruppo $p4m$: posizionando stelle a otto punte nei vertici di un reticolo quadrato e riempiendo gli interstizi con quadrati e rombi, si ottiene una copertura completa del piano. Varianti includono intrecci in cui i bordi delle stelle sembrano passare sopra e sotto in modo alternato, aggiungendo suggestione di tridimensionalità.

La stella a dodici punte, inscritta in un dodecagono, permette costruzioni basate sul gruppo $p6m$. Tassellazioni complesse possono combinare stelle a sei e dodici punte, sfruttando il

fatto che entrambe hanno simmetria compatibile con il reticolo esagonale (poiché 6 divide 12).

Un aspetto matematicamente intrigante è l'uso di pattern quasi-periodici. Lu e Steinhardt (2007) dimostrarono che alcuni mosaici medievali islamici, particolarmente quelli nella Darb-i Imam shrine a Isfahan (Iran, 1453), utilizzano principi di tassellazione quasi-periodica che anticipano le scoperte di Penrose degli anni Settanta. Questi pattern, basati su pentagoni irregolari, coprono il piano senza mai ripetersi esattamente, esibendo simmetria locale pentagonale che non può apparire in gruppi cristallografici convenzionali.

L'interpretazione spirituale di queste geometrie enfatizza l'unità nella molteplicità. Ogni pattern emerge dalla ripetizione di poche forme elementari secondo regole semplici, analogamente alla creazione divina che genera infinita diversità da principi unitari. La contemplazione di questi pattern era considerata un esercizio meditativo, portando la mente dall'apparenza molteplice fenomenica all'unità metafisica sottostante.

Kandinsky e la Geometria dell'Emozione

Wassily Kandinsky (1866-1944) fu uno dei pionieri dell'arte astratta e uno dei primi artisti a teorizzare esplicitamente le basi geometriche della percezione estetica ed emotiva. Nel suo trattato "Punto e linea rispetto alla superficie" (1926), Kandinsky analizzò come elementi geometrici elementari – punti, linee, angoli, forme – evocano risposte emotive specifiche attraverso le loro proprietà strutturali.

Kandinsky associava triangoli a dinamismo e tensione, cerchi a completezza e serenità, quadrati a stabilità e materialità. Queste associazioni non erano arbitrarie ma derivavano, secondo Kandinsky, da corrispondenze innate tra forme geometriche e stati psicologici. Dal punto di vista della teoria dei gruppi, le diverse forme possiedono diversi gruppi di simmetria: il cerchio ha simmetria rotazionale continua $SO(2)$, il quadrato ha simmetria diedrale D_4 , il triangolo equilatero ha D_3 .

Nelle composizioni di Kandinsky, particolarmente quelle del periodo Bauhaus (1922-1933), possiamo identificare manipolazioni deliberate di simmetrie per creare effetti percettivi specifici. Consideriamo "Composizione VIII" (1923). Quest'opera combina elementi geometrici puri – cerchi, triangoli, linee rette – in una configurazione che deliberatamente viola simmetrie globali pur mantenendo simmetrie locali. Cerchi concentrici esibiscono simmetria rotazionale perfetta, ma sono posizionati asimmetricamente nella composizione totale, creando tensione dinamica.

Kandinsky era interessato alla sinestesia, l'associazione cross-modale tra stimoli visivi e altre modalità sensoriali, particolarmente il suono. Egli sosteneva che forme geometriche potessero essere "udite" e che colori avessero "temperatura" e "peso". Dal punto di vista neuroscientifico contemporaneo, possiamo interpretare queste intuizioni come riflettenti connettività cross-modale nella corteccia cerebrale, dove regioni visive interagiscono con aree uditive e somatosensoriali.

Un elemento ricorrente in Kandinsky è l'uso di griglie ortogonali sottostanti che organizzano lo spazio compositivo. Queste griglie, spesso non esplicitamente visibili ma geometricamente ricostruibili, corrispondono al gruppo cristallografico $p4m$. La griglia

fornisce struttura e ordine impliciti, contro cui elementi asimmetrici creano contrasto e dinamismo. Questo dialogo tra ordine e caos, simmetria e asimmetria, è centrale all'estetica di Kandinsky.

Mondrian e l'Astrazione Neoplastica

Piet Mondrian (1872-1944), fondatore del movimento De Stijl e teorico del Neoplasticismo, portò l'astrazione geometrica a un punto estremo di riduzione. Le sue composizioni mature, come "Composizione con rosso, giallo e blu" (1921), utilizzano esclusivamente linee nere ortogonali e rettangoli colorati con colori primari più bianco, nero e grigio.

Le griglie di Mondrian possiedono una simmetria implicita: sono invarianti sotto riflessioni rispetto agli assi orizzontale e verticale, corrispondendo al gruppo puntuale D_2 (il gruppo diedrale di ordine 2, che ha quattro elementi: identità, rotazione di 180° , e due riflessioni). Tuttavia, Mondrian evitava sistematicamente simmetrie esplicite perfette. Le linee nere dividono la tela in rettangoli di dimensioni diverse, deliberatamente asimmetriche. Questa asimmetria controllata crea tensione visiva che l'occhio cerca di risolvere, mantenendo l'attenzione impegnata.

Dal punto di vista compositivo, Mondrian utilizzava principi di proporzione che possono essere analizzati attraverso la teoria dei gruppi di scala. Se denotiamo con R il rapporto tra dimensioni di rettangoli adiacenti, le composizioni di Mondrian tendono a evitare rapporti semplici (1:1, 1:2, 2:3) preferendo rapporti irrazionali che prevengono ripetizione periodica. Questa scelta produce composizioni che mancano di scala caratteristica, esibendo una sorta di auto-similarità statistica senza simmetria frattale esplicita.

L'evoluzione artistica di Mondrian può essere interpretata come un progressivo aumento di astrazione e simmetria. Le opere figurative iniziali mantengono la complessità dell'apparenza naturale. Le opere intermedie, come le serie di alberi (1908-1912), mostrano semplificazione progressiva verso forme geometriche. Le opere mature raggiungono pura astrazione, eliminando ogni riferimento rappresentazionale e riducendo il vocabolario visivo a elementi geometrici elementari con simmetrie semplici.

Mondrian teorizzò questo processo nel saggio "Il Neoplasticismo" (1920), argomentando che l'arte dovrebbe esprimere relazioni universali attraverso mezzi plastici puri, liberi da particolarità soggettive o naturali. La griglia ortogonale, con la sua simmetria, rappresentava per Mondrian l'armonia universale, l'equilibrio tra forze opposte (verticale versus orizzontale, colore versus non-colore).

Bridget Riley e l'Op Art: Simmetrie che Ingannano

Bridget Riley (nata nel 1931) rappresenta il culmine dell'Op Art, un movimento che sfrutta sistematicamente illusioni ottiche basate su pattern geometrici. Le opere di Riley utilizzano ripetizioni regolari, simmetrie precise e gradienti controllati per indurre effetti percettivi di movimento, vibrazione, profondità e instabilità, pur essendo composte da forme statiche bidimensionali.

Consideriamo "Movement in Squares" (1961). Quest'opera consiste in una griglia regolare di quadrati neri su sfondo bianco, con dimensioni dei quadrati che variano gradualmente. La

griglia di base ha simmetria $p4m$, ma la modulazione delle dimensioni introduce simmetria aggiuntiva: simmetria rispetto a rotazioni di 90° attorno al centro. Tuttavia, l'effetto percettivo è di una superficie ondulante e instabile, come se la griglia fosse proiettata su una superficie curva.

Questo effetto può essere spiegato attraverso la teoria dei filtri di Gabor. Il sistema visivo decompone il pattern in componenti a diverse frequenze spaziali. La modulazione periodica delle dimensioni dei quadrati introduce frequenze basse (la variazione di dimensione) che modulano frequenze alte (i bordi dei quadrati). Questa modulazione di ampiezza è interpretata dal sistema visivo come indicativa di curvatura tridimensionale, poiché nell'ambiente naturale oggetti curvi producono variazioni di dimensione apparente.

"Current" (1964) utilizza linee ondulate parallele che creano un effetto di flusso dinamico. Le linee hanno simmetria traslazionale lungo la direzione orizzontale e approssimativamente riflessione speculare rispetto a un asse centrale, ma le ondulazioni sono sfasate in modo da creare pattern di interferenza che producono l'illusione di movimento. L'analisi di Fourier di questo pattern rivela che le componenti frequenziali dominanti cadono nella banda in cui neuroni di V1 sono massimamente sensibili, e che la modulazione spaziale delle fasi produce attivazione differenziale che il sistema visivo interpreta come segnale di movimento.

Dal punto di vista della teoria delle rappresentazioni, le opere di Riley sfruttano sovrapposizioni di pattern con diversi gruppi di simmetria che interferiscono costruttivamente o distruttivamente. Pattern di Moiré, prodotti da sovrapposizione di griglie con orientamenti leggermente diversi, sono un esempio: due griglie con simmetria $p4m$, ruotate una rispetto all'altra di un angolo piccolo θ , producono un pattern di interferenza con frequenza spaziale molto più bassa, proporzionale a θ .

Riley stessa descrisse il suo processo creativo in termini di esplorazione sistematica di variazioni parametriche. Partendo da una configurazione base (per esempio, una griglia regolare), ella introdurrebbe variazioni controllate (modulazione di spaziatura, orientamento, dimensione) osservando gli effetti percettivi risultanti. Questa metodologia è notevolmente simile all'approccio di un matematico che esplora lo spazio dei parametri di una trasformazione, o di un fisico che studia transizioni di fase.

Sintesi Teorica, Sviluppi Contemporanei e Prospettive Future

Verso una Teoria Unificata: Simmetria, Informazione e Percezione

L'insieme delle evidenze neurobiologiche, matematiche e psicofisiche discusse nelle sezioni precedenti converge verso una concezione unificata della percezione visiva come processo di analisi armonica su spazi con struttura di gruppo. Questa concezione, pur radicata in tradizioni matematiche classiche (Fourier, Lie, Weyl), ha trovato nel contesto neurofisiologico un'applicazione concreta che ne illumina tanto la potenza esplicativa quanto i limiti e le direzioni di sviluppo futuro.

La tesi centrale è che il sistema visivo implementa una rappresentazione distribuita degli stimoli che rispetta le simmetrie naturali dello spazio visivo. Queste simmetrie non sono imposte arbitrariamente ma riflettono invarianze geometriche fondamentali: se un oggetto viene traslato, ruotato o scalato, rimane lo stesso oggetto. Il cervello deve estrarre rappresentazioni che catturino questa identità sottostante pur codificando simultaneamente informazione sulla trasformazione specifica applicata.

La teoria delle rappresentazioni di gruppi fornisce il linguaggio matematico appropriato per descrivere questo processo. Rappresentazioni irriducibili corrispondono a componenti informative indipendenti che non possono essere ulteriormente decomposte rispettando le simmetrie. Neuroni con campi recettivi di Gabor implementano fisicamente elementi di base di queste rappresentazioni per il gruppo euclideo del piano $SE(2)$. Popolazioni di tali neuroni, organizzate secondo mappe di orientamento e frequenza, costituiscono un sistema di coordinate naturali nello spazio funzionale delle immagini.

Dal punto di vista informazionale, questa decomposizione ha vantaggi computazionali profondi. Olshausen e Field (1996) dimostrarono che imponendo un criterio di sparsità alla rappresentazione neurale di immagini naturali – richiedendo cioè che solo pochi neuroni siano attivi simultaneamente – emergono spontaneamente campi recettivi simili a quelli osservati in V1. La sparsità implica efficienza: trasmettere pochi impulsi nervosi invece di molti riduce il costo metabolico, che costituisce un vincolo evolutivo cruciale dato che il cervello umano consuma circa il venti percento dell'energia corporea totale pur rappresentando solo il due percento della massa.

La teoria dell'informazione predittiva (predictive coding), sviluppata da Rao e Ballard (1999) e Friston (2005), fornisce un quadro complementare. Secondo questa teoria, il cervello costruisce continuamente modelli generativi della sua entrata sensoriale, confrontando predizioni con osservazioni effettive e trasmettendo verso l'alto solo gli errori di predizione. Le simmetrie facilitano questo processo permettendo generalizzazioni: se ho visto un oggetto da un punto di vista, posso predire approssimativamente il suo aspetto da punti di vista correlati attraverso trasformazioni nel gruppo di simmetria.

Estensioni a Domini Non Euclidei: Visione su Varietà

Mentre la teoria classica di Gabor e le rappresentazioni su $SE(2)$ sono adeguate per descrivere la visione di stimoli bidimensionali o proiezioni planari di scene tridimensionali, una teoria completa della visione deve affrontare la geometria non euclidea intrinseca al problema visivo. La superficie della retina è curva, non piatta. Oggetti tridimensionali hanno superfici che sono varietà differenziabili generali. Il campo visivo completo di molti animali copre una frazione sostanziale della sfera, richiedendo analisi armonica su S^2 piuttosto che $\mathbb{R}^2$.

Le armoniche sferiche, discusse precedentemente, forniscono gli strumenti per analisi armonica su S^2 . Wavelet sferiche, costruite attraverso dilatazioni localizzate di armoniche sferiche, permettono decomposizioni multiscala sulla sfera analoghe alle decomposizioni wavelets sul piano. Queste tecniche trovano applicazione nella modellazione di cellule gangliari retiniche in specie con campi visivi ampi, come pesci e uccelli.

Per superfici più generali, la teoria spettrale dell'operatore di Laplace-Beltrami fornisce una generalizzazione naturale dell'analisi di Fourier. Su una varietà riemanniana M con metrica g , il laplaciano Δ_g è un operatore differenziale invariante sotto isometrie. Le autofunzioni di questo operatore:

$$\Delta_g \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

generalizzano le onde piane e forniscono una base per $L^2(M)$. Per varietà compatte, lo spettro è discreto, e la molteplicità di ciascun autovalore riflette la simmetria della varietà: varietà altamente simmetriche hanno autospazi di dimensione alta.

Bronstein, Bruna, LeCun, Szlam e Vandergheynst (2017) svilupparono reti neurali geometriche profonde (geometric deep learning) che estendono architetture convoluzionali a dati definiti su grafi e varietà. Queste reti utilizzano convoluzioni spettrali definite attraverso la trasformata di Fourier generalizzata basata sul laplaciano. L'invarianza sotto isometrie della varietà è automaticamente rispettata, fornendo robustezza a deformazioni non rigide.

Simmetrie Dinamiche e Percezione del Movimento

Fino a questo punto, abbiamo considerato principalmente stimoli statici e simmetrie spaziali. Tuttavia, la visione naturale è intrinsecamente dinamica: organismi si muovono attraverso ambienti, oggetti si muovono nel campo visivo, scene cambiano nel tempo. Una teoria completa deve incorporare simmetrie spazio-temporali.

Il gruppo di Galileo, che descrive trasformazioni tra osservatori in movimento relativo nella meccanica classica, fornisce un punto di partenza. Un elemento del gruppo di Galileo in due dimensioni spaziali più tempo è specificato da:

$$(t, x, y) \rightarrow (t + t_0, x + x_0 + v_x t, y + y_0 + v_y t)$$

dove (t_0, x_0, y_0) rappresenta una traslazione spazio-temporale e (v_x, v_y) una velocità relativa. Stimoli che differiscono per una trasformazione galileiana rappresentano lo stesso oggetto osservato da sistemi di riferimento in movimento uniforme.

Le cellule sensibili alla direzione del movimento, scoperte in aree visive extrastriatali come MT (middle temporal) e MST (medial superior temporal), possono essere interpretate come implementanti analizzatori per rappresentazioni del gruppo di Galileo. Adelson e Bergen (1985) mostrarono che cellule sensibili al movimento possono essere modellate come filtri spazio-temporali orientati nello spazio-tempo tridimensionale (x, y, t) . Un movimento con velocità costante traccia una traiettoria rettilinea in questo spazio, e un filtro orientato lungo questa direzione risponde ottimalmente.

La teoria dei wavelets si estende naturalmente al dominio spazio-temporale. Wavelets 3D, funzioni ben localizzate in (x, y, t) e nelle corrispondenti frequenze spaziali e temporali, forniscono una rappresentazione multicanale del movimento. Heeger (1987) utilizzò wavelets spazio-temporali per modellare la stima del flusso ottico, dimostrando che combinazioni opportune di risposte di filtri orientati in direzioni diverse permettono di disambiguare la direzione e la velocità del movimento.

Un aspetto affascinante è la percezione di eventi biologici attraverso movimenti caratteristici. Johansson (1973) dimostrò che osservatori umani possono riconoscere azioni complesse (camminare, correre, danzare) osservando solo punti luminosi posizionati sulle giunture di attori che si muovono nell'oscurità (point-light displays). Questo riconoscimento è notevolmente robusto, funzionando anche con esposizioni brevissime e da punti di vista non familiari.

Dal punto di vista della teoria dei gruppi, azioni biologiche possiedono simmetrie caratteristiche. Il ciclo di camminata umana ha simmetria approssimativa di traslazione temporale (periodicità) e simmetria bilaterale tra lato destro e sinistro del corpo. Rappresentazioni che decompongono il movimento secondo queste simmetrie possono estrarre efficacemente firma cinematiche discriminative. Giese e Poggio (2003) svilupparono modelli computazionali di riconoscimento di azioni basati su gerarchie di filtri spazio-temporali che catturano progressivamente invarianze di ordine superiore.

Apprendimento di Rappresentazioni Simmetriche: Deep Learning e Teoria dei Gruppi

Negli ultimi quindici anni, reti neurali profonde hanno rivoluzionato la visione artificiale, raggiungendo e talvolta superando prestazioni umane in compiti di riconoscimento di oggetti, segmentazione semantica e altri task. Un tema ricorrente nell'analisi di queste reti è l'emergenza spontanea di rappresentazioni che rispettano simmetrie, anche quando tali simmetrie non sono esplicitamente imposte nell'architettura.

Le reti convoluzionali (CNNs), introdotte da LeCun et al. (1989) e sviluppate intensivamente da Krizhevsky, Sutskever e Hinton (2012), implementano una forma di invarianza traslazionale attraverso la condivisione dei pesi. Ogni filtro convoluzionale è applicato a tutte le posizioni nell'immagine, corrispondendo all'idea che caratteristiche visive rilevanti (bordi, texture, parti di oggetti) possono apparire ovunque. Matematicamente, questo corrisponde a richiedere che i pesi della rete formino una rappresentazione del gruppo delle traslazioni.

Cohen e Welling (2016) generalizzarono le CNN introducendo reti equivarianti a gruppi (group equivariant CNNs, G-CNNs). Invece di limitarsi a traslazioni, queste reti implementano equivarianza rispetto a gruppi più generali, come il gruppo delle rotazioni e riflessioni (gruppo diedrale) o il gruppo completo di simmetrie planari. L'equivarianza è garantita costruttivamente: invece di convoluzione standard, si utilizza convoluzione sul gruppo G :

$$(f * \psi)(g) = \sum_{\{h \in G\}} f(h) \psi(h^{-1}g)$$

dove f è la mappa di caratteristiche di input e ψ il kernel convoluzionale. Questa operazione commuta con l'azione del gruppo: se trasformiamo l'input secondo g_0 , l'output si trasforma coerentemente.

Kondor e Trivedi (2018) svilupparono una teoria generale di reti neurali su spazi omogenei (omogeneità significa che il gruppo agisce transitivamente, cioè ogni punto può essere trasformato in ogni altro punto attraverso un'azione del gruppo). Dimostrarono che convoluzione su spazi omogenei si riduce naturalmente a operazioni che coinvolgono rappresentazioni del gruppo di simmetria dello spazio.

Un risultato notevole è il teorema di caratterizzazione universale per reti equivarianti, provato da Kondor, Lin, e Trivedi (2018): ogni funzione equivariante tra spazi con azioni di gruppo può essere approssimata arbitrariamente bene da reti neurali con architettura appropriatamente equivariante. Questo estende il teorema classico di approssimazione universale delle reti neurali al setting con vincoli di simmetria.

Applicazioni: Dal Riconoscimento di Proteine alla Cosmologia

Le tecniche di analisi armonica su gruppi e rappresentazioni equivarianti non sono limitate alla neuroscienza della visione ma trovano applicazioni in domini scientifici diversi dove simmetrie giocano ruoli fondamentali.

In biologia strutturale, la predizione della struttura tridimensionale di proteine a partire dalla sequenza amminoacidica è un problema centrale. AlphaFold2, sviluppato da DeepMind e che ha ottenuto precisione quasi sperimentale in questa task (Jumper et al., 2021), utilizza reti equivarianti rispetto al gruppo euclideo tridimensionale $SE(3)$. Proteine hanno forma tridimensionale definita ma possono essere orientate arbitrariamente nello spazio. Una rappresentazione utile deve essere invariante rispetto a rotazioni e traslazioni globali della proteina, ma equivariante rispetto a trasformazioni locali che preservano la struttura relativa.

In fisica delle particelle, la classificazione di eventi in rivelatori di particelle richiede analisi di dati che hanno simmetrie del gruppo di Lorentz (relatività speciale). Reti neurali equivarianti rispetto a boost di Lorentz sono state sviluppate per identificare jets di particelle e distinguere processi fisici diversi.

In cosmologia, l'analisi del fondo cosmico a microonde (CMB) utilizza estensivamente armoniche sferiche. La temperatura del CMB è una funzione sulla sfera celeste, e la sua decomposizione in armoniche sferiche rivela le scale angolari delle fluttuazioni primordiali. Anisotropie a grande scala corrispondono a armoniche di grado basso (l piccolo), mentre strutture a piccola scala corrispondono a l grande. Lo spettro di potenza angolare:

$$C_l = (1/(2l+1)) \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2$$

dove a_{lm} sono i coefficienti dell'espansione in armoniche sferiche della mappa di temperatura, contiene informazione cruciale sui parametri cosmologici come la densità di materia oscura, energia oscura e costante di Hubble.

Limiti e Criticità della Teoria

Nonostante i successi, la teoria di rappresentazioni irriducibili nella cognizione visiva affronta limitazioni e questioni irrisolte che meritano considerazione critica.

Una prima limitazione è la natura idealizzata dei modelli. I neuroni biologici non sono filtri lineari perfetti: hanno non linearità saturanti, rumore intrinseco, dinamiche temporali complesse, connettività ricorrente. I campi recettivi reali mostrano variabilità individuale e non conformità perfetta ai modelli di Gabor. Mentre la teoria cattura aspetti fondamentali, dettagli fini possono richiedere modelli più sofisticati.

Una seconda questione riguarda il legame tra rappresentazioni neurali e percezione cosciente. Possiamo caratterizzare matematicamente come popolazioni neuronali rispondono a stimoli, ma il passaggio da attività neurale a esperienza soggettiva rimane misterioso. Il problema difficile della coscienza (hard problem of consciousness) non è risolto sapendo che V1 implementa rappresentazioni di $SE(2)$.

Una terza limitazione è l'incompletezza: molti aspetti della visione di alto livello (riconoscimento di scene complesse, comprensione di eventi narrativi, ragionamento visivo) richiedono processi che vanno oltre decomposizioni locali in rappresentazioni di gruppi di simmetria geometriche. Semantica, contesto, memoria e aspettativa giocano ruoli cruciali che la teoria puramente bottom-up basata su filtri locali non cattura.

Una quarta questione è l'individualità e la plasticità. Campi recettivi in V1 non sono interamente determinati geneticamente ma si sviluppano attraverso esperienza visiva durante periodi critici postnatali. Deprivazione visiva o ambienti anomali (per esempio, esposizione solo a orientazioni orizzontali) producono popolazioni neuronali distorte. Come questa plasticità si integra con vincoli strutturali imposti dalla teoria dei gruppi è questione complessa.

Direzioni Future: Verso una Neurobiologia Computazionale Algebrica

Le direzioni future più promettenti per l'estensione della teoria coinvolgono integrazioni sempre più strette tra neurobiologia, matematica e intelligenza artificiale.

Un'area emergente è la topologia algebrica applicata alla neuroscienza (algebraic topological neuroscience). Tecniche come l'omologia persistente permettono di caratterizzare strutture multi-scala in dati neurali, rivelando organizzazioni che potrebbero non essere evidenti da analisi standard. Le mappe di orientamento in V1, con i loro centri di pinwheel, hanno topologia non banale che può essere quantificata attraverso classi caratteristiche in fibrati vettoriali.

Un secondo sviluppo importante è l'integrazione di modelli basati su gruppi con architetture ricorrenti e attentive. I transformer, che hanno rivoluzionato il processamento del linguaggio naturale e stanno cominciando a impattare anche la visione, utilizzano meccanismi di attenzione che permettono interazioni a lungo raggio. Combinare equivarianza locale (attraverso convoluzioni su gruppi) con attenzione globale potrebbe catturare sia vincoli geometrici che dipendenze semantiche.

Un terzo tema è l'apprendimento meta-simmetrico: invece di imporre simmetrie a priori, si possono sviluppare architetture che apprendono quali simmetrie sono rilevanti per un dato task dai dati. Questo richiede rappresentazioni flessibili che possano adattarsi a strutture di gruppo variabili, potenzialmente attraverso parametrizzazioni continue di famiglie di gruppi.

Un quarto sviluppo è l'estensione a modalità sensoriali multiple. Mentre la maggior parte del lavoro si è concentrata sulla visione, udizione, tatto e altri sensi hanno le loro proprie strutture di simmetria. L'integrazione multisensoriale nel cervello richiede rappresentazioni che rispettano simultaneamente simmetrie di spazi sensoriali diversi. Gruppi prodotto e rappresentazioni tensoriali potrebbero fornire il quadro appropriato.

Implicazioni Filosofiche: Forma, Percezione e Realtà

Le teorie discusse in questo saggio sollevano questioni filosofiche profonde sulla natura della percezione e della realtà. La tesi kantiana che lo spazio e il tempo siano forme a priori dell'intuizione, condizioni trascendentali della possibilità dell'esperienza piuttosto che proprietà degli oggetti in sé, trova eco interessante nella struttura matematica del sistema visivo. Le simmetrie che caratterizzano le rappresentazioni neurali non sono semplicemente lette dall'ambiente ma riflettono l'organizzazione intrinseca dell'apparato percettivo.

Tuttavia, questa non è pura arbitrarietà soggettivista. Le simmetrie geometriche del gruppo euclideo non sono imposte capricciosamente ma corrispondono a invarianze reali del mondo fisico. Un oggetto rigido effettivamente rimane identico a sé stesso quando traslato o ruotato. L'evoluzione ha configurato sistemi percettivi che rispettano queste invarianze perché farlo conferisce vantaggio adattativo: riconoscere cibo o predatori indipendentemente dalla posizione o orientamento è funzionale alla sopravvivenza.

La teoria delle rappresentazioni fornisce così un ponte tra realismo e costruttivismo. La percezione non è né registrazione passiva di realtà preesistente né pura costruzione arbitraria, ma piuttosto interazione strutturata tra organismi dotati di apparati con architettura determinata da vincoli evolutivisti e ambienti con regolarità oggettive. Le simmetrie sono il linguaggio comune che permette questo dialogo.

Conclusioni: Armonia tra Matematica, Neurobiologia e Arte

Questo saggio ha esplorato come il cervello decomponga stimoli visivi complessi utilizzando rappresentazioni che rispettano strutture algebriche profonde, particolarmente gruppi di simmetria. Abbiamo visto come la corteccia visiva primaria implementi naturalmente rappresentazioni del gruppo euclideo del piano $SE(2)$ attraverso neuroni orientati organizzati in mappe sistematiche. Abbiamo analizzato come pattern decorativi e artistici, dagli ornamenti architettonici ai mosaici islamici alle composizioni astratte, possano essere compresi attraverso i diciassette gruppi cristallografici planari e gruppi correlati.

La teoria di Gabor e le wavelets emergono come strumenti matematici che catturano simultaneamente localizzazione spaziale e frequenziale, saturando limiti fondamentali imposti dal principio di indeterminazione. Queste funzioni non sono astrazioni arbitrarie ma corrispondono con notevole precisione ai campi recettivi di neuroni reali, suggerendo che il cervello ha converguto evolutivamente verso soluzioni ottimali a problemi di processamento dell'informazione visiva.

L'esplorazione artistica di simmetrie, da Kandinsky a Mondrian a Riley, rivela come manipolazioni deliberate di pattern geometrici possano produrre effetti percettivi ed emotivi specifici. L'arte astratta, lungi dall'essere arbitraria, opera entro e contro vincoli percettivi radicati in meccanismi neurali che rispondono a simmetrie. La potenza estetica deriva spesso da dialoghi sofisticati tra ordine e complessità, simmetria e violazione di simmetria, aspettativa e sorpresa.

Le direzioni future promettono integrazioni sempre più profonde tra neurobiologia, matematica e intelligenza artificiale. Reti neurali equivarianti implementano esplicitamente vincoli di simmetria, migliorando generalizzazione ed efficienza. Estensioni a varietà non

euclidee, dinamiche spazio-temporali e modalità multisensoriali ampliano il dominio applicativo della teoria.

In ultima analisi, la convergenza tra analisi armonica su gruppi, neurobiologia della visione e pratica artistica testimonia una verità fondamentale: la matematica non è semplicemente uno strumento descrittivo esterno alla natura, ma permea l'organizzazione stessa dei sistemi viventi e delle loro interazioni con l'ambiente. Le simmetrie non sono imposte da matematici astratti ma scoperte nelle regolarità del mondo e incorporate nelle architetture cerebrali attraverso miliardi di anni di evoluzione. La bellezza che percepiamo in forme simmetriche riflette il riconoscimento, forse parzialmente inconscio, di queste armonie profonde che connettono mente, cervello e cosmo in un intreccio indissolubile.

Il programma di ricerca delineato in questo saggio – comprendere la percezione come analisi armonica su gruppi – è lontano dall'essere completo. Moltissime questioni rimangono aperte, dalla caratterizzazione precisa di rappresentazioni neurali in aree visive di alto livello, all'integrazione di processi bottom-up e top-down, al ruolo di attenzione e memoria nella modulazione di rappresentazioni sensoriali. Tuttavia, i progressi conseguiti nell'ultimo mezzo secolo, dalle scoperte pionieristiche di Hubel e Wiesel alla teoria contemporanea di reti equivarianti, dimostrano la fecondità dell'approccio e giustificano ottimismo circa futuri sviluppi.

La visione, questo senso che ci connette intimamente con il mondo circostante e che ha ispirato secoli di riflessione scientifica, filosofica e artistica, continua a rivelarsi come fenomeno di profondità inesauribile. Ogni risposta apre nuove domande, ogni teoria genera nuove linee di indagine. Nella tensione produttiva tra rigore matematico, osservazione empirica e intuizione artistica, la scienza della visione avanza, illuminando non solo i meccanismi della percezione ma anche la natura della mente e il posto dell'essere umano nell'ordine naturale.

Attraverso lo studio delle simmetrie percettive, quindi, tocchiamo questioni che trascendono la neurobiologia tecnica per raggiungere domande ultime sull'organizzazione dell'esperienza cosciente, sulla struttura matematica del reale, e sulla possibilità di una comprensione scientifica della bellezza. La maestosità di queste prospettive, lungi dallo scoraggiare, dovrebbe ispirare continui sforzi di ricerca, sempre più interdisciplinari e integrativi, che onorino la complessità del fenomeno percettivo nelle sue molteplici dimensioni – fisica, biologica, computazionale, psicologica, estetica e filosofica.

Bibliografia Essenziale e Riferimenti

Adelson, E. H., & Bergen, J. R. (1985). Spatiotemporal energy models for the perception of motion. *Journal of the Optical Society of America A*, 2(2), 284-299.

Arnheim, R. (1974). *Art and Visual Perception: A Psychology of the Creative Eye*. University of California Press.

Birkhoff, G. D. (1933). *Aesthetic Measure*. Harvard University Press.

- Bronstein, M. M., Bruna, J., LeCun, Y., Szlam, A., & Vandergheynst, P. (2017). Geometric deep learning: Going beyond Euclidean data. *IEEE Signal Processing Magazine*, 34(4), 18-42.
- Carandini, M., & Heeger, D. J. (2012). Normalization as a canonical neural computation. *Nature Reviews Neuroscience*, 13(1), 51-62.
- Cohen, T. S., & Welling, M. (2016). Group equivariant convolutional networks. *Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning*, 2990-2999.
- Daugman, J. G. (1985). Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters. *Journal of the Optical Society of America A*, 2(7), 1160-1169.
- Field, D. J. (1987). Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(12), 2379-2394.
- Gabor, D. (1946). Theory of communication. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, 93(26), 429-457.
- Giese, M. A., & Poggio, T. (2003). Neural mechanisms for the recognition of biological movements. *Nature Reviews Neuroscience*, 4(3), 179-192.
- Heeger, D. J. (1987). Model for the extraction of image flow. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(8), 1455-1471.
- Heeger, D. J. (1992). Normalization of cell responses in cat striate cortex. *Visual Neuroscience*, 9(2), 181-197.
- Hubel, D. H., & Wiesel, T. N. (1962). Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex. *Journal of Physiology*, 160(1), 106-154.
- Jacobsen, T., Schubotz, R. I., Höfel, L., & Cramon, D. Y. V. (2006). Brain correlates of aesthetic judgment of beauty. *NeuroImage*, 29(1), 276-285.
- Johansson, G. (1973). Visual perception of biological motion and a model for its analysis. *Perception & Psychophysics*, 14(2), 201-211.
- Jones, J. P., & Palmer, L. A. (1987). An evaluation of the two-dimensional Gabor filter model of simple receptive fields in cat striate cortex. *Journal of Neurophysiology*, 58(6), 1233-1258.
- Jumper, J., et al. (2021). Highly accurate protein structure prediction with AlphaFold. *Nature*, 596(7873), 583-589.
- Kandinsky, W. (1926). *Punkt und Linie zu Fläche*. Albert Langen Verlag.
- Kazhdan, M., Funkhouser, T., & Rusinkiewicz, S. (2003). Rotation invariant spherical harmonic representation of 3D shape descriptors. *Symposium on Geometry Processing*, 156-164.

- Kondor, R., Lin, Z., & Trivedi, S. (2018). Clebsch-Gordan nets: A fully Fourier space spherical convolutional neural network. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 31.
- Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Hinton, G. E. (2012). ImageNet classification with deep convolutional neural networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 25.
- LeCun, Y., et al. (1989). Backpropagation applied to handwritten zip code recognition. *Neural Computation*, 1(4), 541-551.
- Liu, Y., Chernov, M., Essock, E., Glazier, J., & Serre, T. (2009). Symmetry perception and its neural correlates. *Journal of Vision*, 9(8), 1046.
- Locher, P., & Smets, G. (1992). The influence of stimulus dimensionality and viewing orientation on detection of symmetry in dot patterns. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 30(1), 43-46.
- Lu, P. J., & Steinhardt, P. J. (2007). Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture. *Science*, 315(5815), 1106-1110.
- Mallat, S. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), 674-693.
- Olshausen, B. A., & Field, D. J. (1996). Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images. *Nature*, 381(6583), 607-609.
- Palmer, S. E., & Griscom, W. S. (2013). Accounting for taste: Individual differences in preference for harmony. *Psychonomic Bulletin & Review*, 20(3), 453-461.
- Palmer, S. E., & Hemenway, K. (1978). Orientation and symmetry: Effects of multiple, rotational, and near symmetries. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 4(4), 691-702.
- Ramachandran, V. S., & Hirstein, W. (1999). The science of art: A neurological theory of aesthetic experience. *Journal of Consciousness Studies*, 6(6-7), 15-51.
- Rao, R. P., & Ballard, D. H. (1999). Predictive coding in the visual cortex: A functional interpretation of some extra-classical receptive-field effects. *Nature Neuroscience*, 2(1), 79-87.
- Reber, R., Schwarz, N., & Winkielman, P. (2004). Processing fluency and aesthetic pleasure: Is beauty in the perceiver's processing experience? *Personality and Social Psychology Review*, 8(4), 364-382.
- Ringach, D. L. (2002). Spatial structure and symmetry of simple-cell receptive fields in macaque primary visual cortex. *Journal of Neurophysiology*, 88(1), 455-463.

Sasaki, Y., Vanduffel, W., Knutsen, T., Tyler, C., & Tootell, R. (2005). Symmetry activates extrastriate visual cortex in human and nonhuman primates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(8), 3159-3163.

Tyler, C. W. (1996). Human symmetry detection exhibits reverse hierarchy in spatial frequency. *Spatial Vision*, 10(2), 125-128.

Van der Helm, P. A., & Leeuwenberg, E. L. (1996). Goodness of visual regularities: A nontransformational approach. *Psychological Review*, 103(3), 429-456.

Wagemans, J. (1995). Detection of visual symmetries. *Spatial Vision*, 9(1), 9-32.

Washburn, D. K., & Crowe, D. W. (1988). *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*. University of Washington Press.

Wilkinson, F. (1998). Symmetry perception: A novel approach for biological shapes. *Vision Research*, 38(21), 3357-3365.